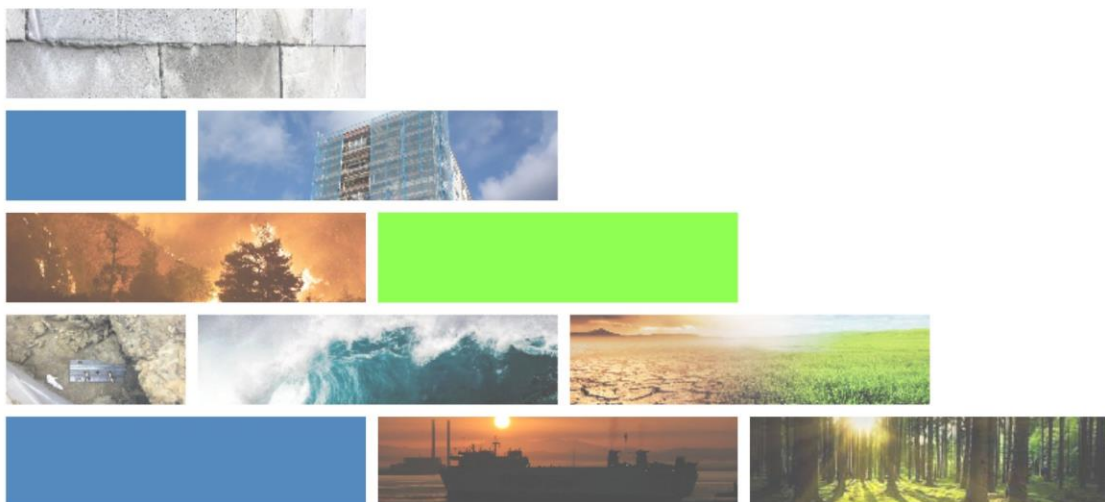




**FACULTY OF CIVIL
ENGINEERING
CTU IN PRAGUE**

102FY_1 – Fyzika 1 G Praktická cvičení



Ing. Jan Trejbal, Ph.D., Ing. Petra Tichá, Ph.D.

Katedra fyziky
FSv ČVUT

jan.trejbal@fsv.cvut.cz

<http://people.fsv.cvut.cz/~trejba4/>

- Jan Trejbal
 - jan.trejbal@fsv.cvut.cz
 - A-623
 - Konzultační hodiny: pondělí 12:00-13:30
 - <http://people.fsv.cvut.cz/~trejba4/index.html>
- Petra Tichá
 - petra.ticha@fsv.cvut.cz
 - A-622
 - Konzultační hodiny: čtvrtek 11:00-12:00

Podmínky k získání zápočtu

- Docházka
 - Absence dopředu písemně omluvené (E-mail)
 - Každý musí naměřit všechny úlohy
 - Nepřítomnost nutno nahradit
- Projekt
 - Vypracování a zpracování projektu ve skupinách (2- až 3-členné)
 - Odevzdání do 4. 11. 2024
 - Zadání bude posláno
- Laboratoře
 - 8 úloh
 - Měření fyzikálních veličin
 - Naměřená data a základní výpočty nutno schválit cvičícím před odchodem
 - Vypracování a odevzdání protokolu za skupinu, vždy do následující hodiny
 - Student musí být na hodinu připraven
 - <http://departments.fsv.cvut.cz/k102/bakalarske-studium/Fyzika%201G?podklady-cviceni>

Harmonogram

- Teoretický úvod
- Laboratoře

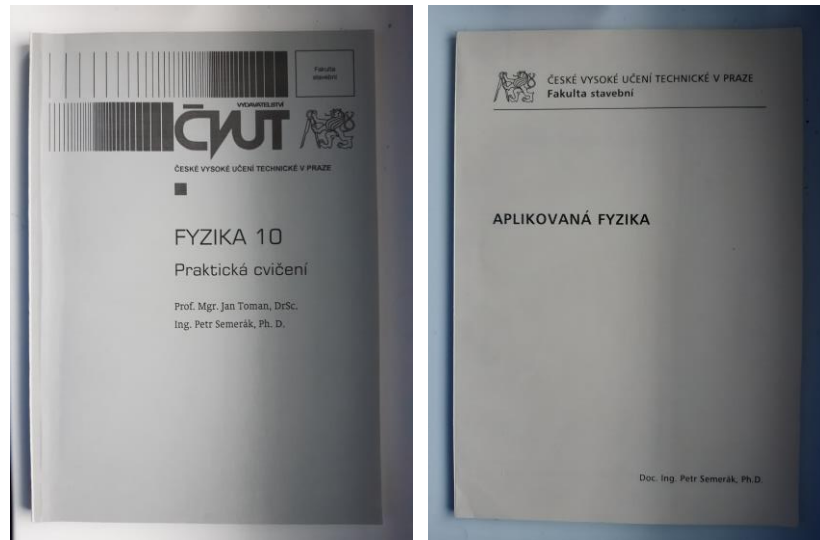
Cvičení č.	Datum	Látka
1	26. 9.	Úvodní hodina, podmínky získání zápočtu, bezpečnost v laboratoři, administrativa.
2.–4.	3. 10.–17. 10.	Aplikovaná matematika ve fyzice (diferenciální a integrální počet, vektorový počet, základy numerické matematiky, derivace a integrály základních funkcí). Projekt. Základy zpracování fyzikálních měření (odhad skutečných hodnot měření a odhad nejistot, prezentace výsledků).
5.–12.	24. 10.–12. 12.	Měření laboratorních úloh (7-8 úloh)
13.	19. 12.	Hodnocení, zápočty, rezerva.

http://people.fsv.cvut.cz/~trejbj4/files/102FY_1.pdf

- 8 úloh
 1. Měření hustoty pevných látek a kapalin
 2. Měření měrné tepelné kapacity látek
 3. Měření součinitele délkové teplotní roztažnosti
 4. Měření momentu setrvačnosti
 5. Měření elektrického odporu
 6. Měření kapacity kondenzátorů
 7. Studium harmonického pohybu
 8. Stanovení modulu pružnosti v tahu z průhybu tyče

<http://departments.fsv.cvut.cz/k102/bakalarske-studium/Fyzika%201G?podklady-cviceni>

- Toman J., Semerák P., Fyzika 10 – Praktická cvičení, Nakladatelství ČVUT, 2001.
- Semerák P., Aplikovaná fyzika, Česká technika, 2009
- <http://webfyzika.fsv.cvut.cz/>
- Pokorný P., Metodika zpracování fyzikálních měření, FSv ČVUT, http://departments.fsv.cvut.cz/k102/sites/default/files/k102/vyuka/predmety/soubory/Methodika_zpracovani_fyzikalnich_mereni.pdf



- Dodržovat bezpečnostní pokyny, pořádek, čistotu
- Dbát pokynů cvičícího
- Elektronická zařízení zapojovat až po odsouhlasení a pod dohledem vyučujícího
- Neotvírat elektrické rozvodny
- Neopouštět laboratoř bez oznámení
- Zákaz kouření, jezení, požívání alkoholických nápojů, práce pod vlivem alkoholických nápojů a jiných omamných látek
- Škody vzniklé nedbalostí, neopatrností nebo porušením pokynů musí viníci nahradit obstaráním náhrady, případně zaplacením (způsob určí učitel nebo vedoucí laboratoře)
- Upozorňovat na závady, nahlásit zranění

2. cvičení

Matematika:

Exaktní věda, umělý formální jazyk s platným kategorickým požadavkem exaktní interpretace všech jazykových konstrukcí. Z formálního hlediska se zabývá kvantitou, strukturou, prostorem a změnou.

Fyzika:

Exaktní věda, která zkoumá zákonitosti přírodních jevů. Pro praktické řešení problémů využívá nástroje matematiky založené na exaktních důkazech.

Příklad:

Lokomotiva se rozjíždí z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že po 2 minutách zrychlení dosáhne hodnoty $a=0,4 \text{ ms}^{-2}$. Určete její rychlost v a uraženou dráhu s v tomto čase, jestliže se pohybuje přímočaře.

$$(v=24 \text{ ms}^{-1}, s = 960 \text{ m})$$

Sada jednoduchých vzorců už nestačí, nutno pracovat s **diferenciálními** rovnicemi.

$$\begin{array}{c} s \\ v \times t \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v \\ a \times t \end{array}$$

$$v_{(t)} = \frac{ds_{(t)}}{dt}$$

$$a_{(t)} = \frac{dv_{(t)}}{dt}$$



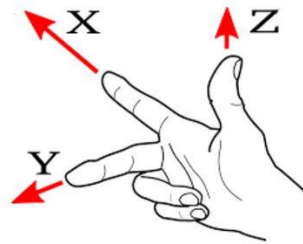
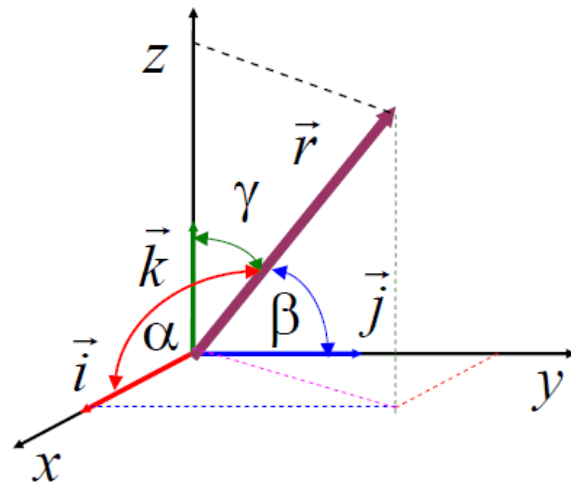
Základy vektorového, maticového, diferenciálního a integrálního počtu

- Vektory
- Matice
- Derivace
- Integrály

Základy vektorového počtu

- Kartézská souřadná soustava

- Pravoúhlá
- Pravotočivá
- Vektor je popsán třemi průměty a_x , a_y , a_z do souřadných os a ortogonálními vektory báze



Vektor: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

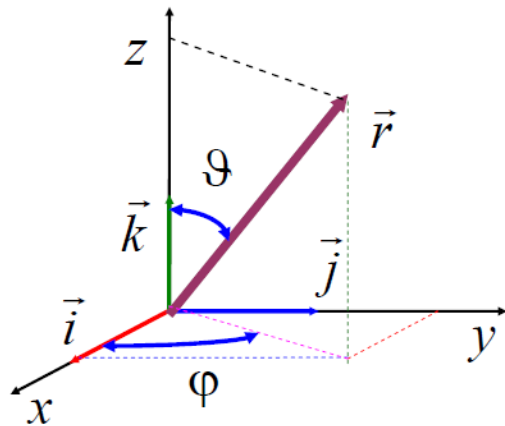
Velikost vektoru: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Vektory báze: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

Polohový vektor: $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos \beta = \frac{y}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

- Křivočaré souřadné soustavy
 - Sférické
 - Válcové
 - Eliptické



$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}$$

Základy vektorového počtu

- Skalární součin dvou vektorů

- Výsledkem je skalár = číslo

$$S = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_k a_k b_k$$

- Vektorový součin dvou vektorů

- Výsledkem je vektor, kolmý na oba vektory

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = i a_y b_z + j a_z b_x + k a_x b_y - k a_y b_x - i a_z b_y - j a_x b_z$$

$$\vec{c} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

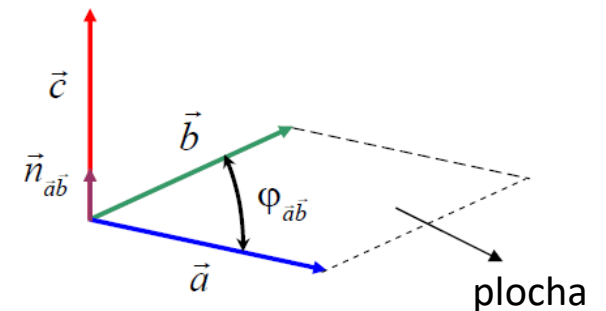
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$



Základy vektorového počtu

- Dvojnásobný vektorový součin

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

- Smíšený součin vektorů

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

- Tenzorový součin vektorů

- Výsledkem je matice

$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

Příklady

- Vypočítejte velikost vektoru $a = [6, 4, -1]$
- Určete skalární součin vektorů $a = [2, 3, -3]$ a $b = [7, -1, 0]$
- Určete vektorový součin vektorů $a = [4, 6, -1]$ a $b = [2, 1, 2]$
- Vypočtete dvojnásobný vektorový součin vektorů $a = [2, 1, 1]$, $b = [0, 2, -1]$ a $c = [-1, 3, 3]$

$$\vec{c} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Maticový zápis vektorů

- Matice je obdélníkové schéma zápisu určitých elementů – prvků

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix}$$

- Vektor lze interpretovat jako matici, jejíž jedna dimenze je rovna 1

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{M,1} \end{bmatrix} \approx [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_M]^T$$

Maticový zápis vektorů

- Pomocí vektorového (maticového) počtu lze velmi snadno obecně vyjádřit a řešit řadu praktických problémů.
- Aparát maticového a vektorového počtu umožňuje velmi rychle řešit např. složité soustavy rovnic, geometrické úlohy, apod.
- Vektorový zápis a výpočty jsou nezávislé na počtu dimenzí (stejný zápis a pravidla počítání pro 2D rovinný případ nebo 3D prostorový případ problémů).

Základní maticové operace

- Sčítání

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,N} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,1} & b_{M,2} & \cdots & b_{M,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,N} + b_{1,N} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,N} + b_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} + b_{M,1} & a_{M,2} + b_{M,2} & \cdots & a_{M,N} + b_{M,N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

- Násobení skalární veličinou

$$k\mathbf{A} = k \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \cdots & ka_{1,N} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \cdots & ka_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{M,1} & ka_{M,2} & \cdots & ka_{M,N} \end{bmatrix}, \quad k\mathbf{A} = \mathbf{A}k$$

- Násobení matic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & a_{M,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,M} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,1} & b_{N,2} & \cdots & b_{N,M} \end{bmatrix} = \{a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,N}b_{N,j}\}_{i,j}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Základní maticové operace

- Skalární součin v maticové formě

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_M]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_M]^T$$

$$\overbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}^{\text{skalární s.}} = \underbrace{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}_{\text{maticové násobení}} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_M] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_M b_M = \sum_{i=1}^M a_i b_i$$

Základní maticové operace

- Příklad: vyřeš následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z - 2w &= -6 \\ 4x + 3y + z - w &= -2 \\ x + y + z + w &= -5 \\ -2x - 2y - 2z + 2w &= -10 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -11,5 \\ 13,75 \\ -2,25 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Inverzní matice k matici A

- Funkce v Excelu
 - INVERZE (vrátí matici inverzní k původní matici)
 - SOUČIN MATIC (po zadání polí dvou matic provede jejich součin)
 - Klávesová zkratka CTRL+SHIFT+ENTER provede zadaný příkaz do více buněk

3. cvičení



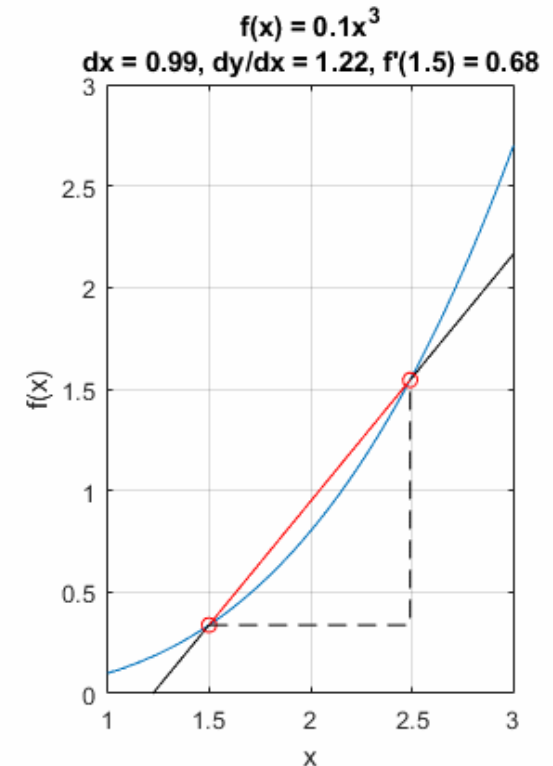
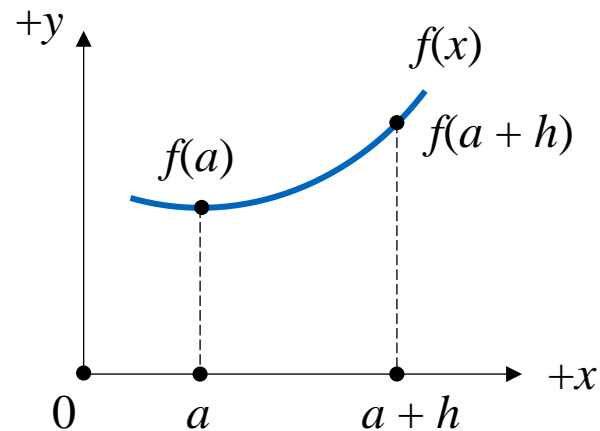
Základy diferenciálního počtu

- Derivace

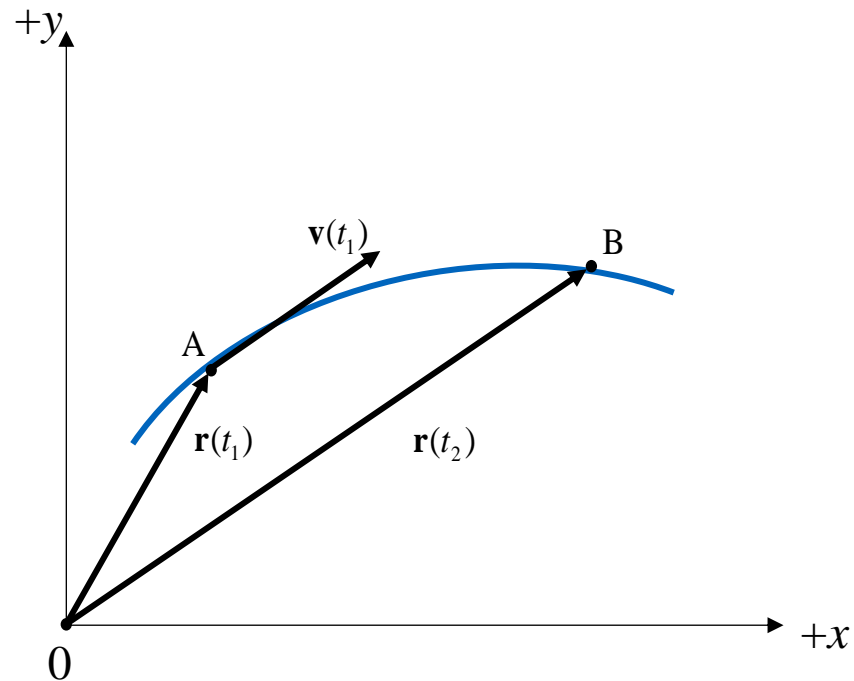
- Okamžitá změna závislé proměnné vzhledem ke změně proměnné nezávislé
- Pro funkci jedné proměnné je derivace funkce v libovolném bodě (pokud existuje) rovna směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě.
- Příklad: okamžitá rychlost hmotného bodu = změna polohy v závislosti na čase

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



- Okamžitá rychlost



$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1), \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

$$\mathbf{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

- Derivace základních funkcí

$$\begin{aligned}
 (x^m)' &= mx^{m-1}, \quad x > 0; & (x^m)^{(n)} &= m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N} \\
 (\sin x)' &= \cos x; & (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
 (\cos x)' &= -\sin x; & (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
 (a^x)' &= a^x \ln a, \quad a > 0; & (a^x)^{(n)} &= a^x (\ln a)^n, \quad a > 0 \\
 (e^x)' &= e^x; & (e^x)^{(n)} &= e^x \\
 (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \quad x > 0; & (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}, \quad x > 0
 \end{aligned}$$

- Algebraická pravidla

$$\begin{aligned}
 & f(x), \quad g(x), \quad \{a, b\} \in \mathbb{R} \\
 (af + bg)' &= af' + bg' \quad \rightarrow \quad (af)' = af', \quad (f + g)' = f' + g' \\
 (fg)' &= f'g + fg' \\
 \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad g \neq 0
 \end{aligned}$$

$$f(x) = h(g(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

... dále viz Matematika

- Derivace součinu

$$\frac{d}{d_t} [S(t)\vec{a}(t)] = \frac{dS}{d_t} \vec{a} + S \frac{d\vec{a}}{d_t}$$

$$\frac{d}{d_t} [\vec{a}(t)\vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}}{d_t} \vec{b} + \vec{a} \frac{d\vec{b}}{d_t}$$

$$\frac{d}{d_t} [\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}}{d_t} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{d_t}$$

- Diferenciál součinu

- Umožňuje určit, jak se změní výsledný součin při malé změně dílčích veličin

$$d[\vec{a}(t)\vec{b}(t)] = d\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot d\vec{b}$$

$$d[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = d\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times d\vec{b}$$

Základy diferenciálního počtu

- Příklady: vypočítejte derivace následujících funkcí podle proměnné x :

a. $f(x) = 2 + x + 4x^2 - 5x^7$,

b. $f(x) = (1 + x + 3x^2)^3$

c. $f(x) = 2 \sin x - 5 \cos x$,

d. $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$,

e. $f(x) = \frac{3x + x^3 + 2x}{3 + x^2}$,

f. $f(x) = \left(\frac{x^3 + x}{3 + x^2 + x} \right)^2$,

g. $f(x) = \tan x$,

h. $f(x) = \cos x \tan^2 x$,

i. $f(x) = 2e^x$,

j. $f(x) = e^{1+x}$,

k. $f(x) = (2e^x)^3$,

l. $f(x) = 5 \ln x - 3x$,

m. $f(x) = 10(\ln x)^3$.

<https://calculator-online.net/cs/derivative-calculator/>

<https://www.wolframalpha.com/>

Základy diferenciálního počtu

- Parciální derivace funkce více proměnných
 - Derivují se podle vybrané proměnné, ostatní se uvažují jako reálné konstanty
 - Značení $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$f(x, y) = 3x + x^2 y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3 + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

$$f(m, t) = m \sin 2t \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial m} = \sin 2t, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 2m \cos 2t$$

- Gradient
 - Vektor, jehož prvky jsou parciální derivace skalární funkce podle jednotlivých proměnných
 - Vektor směru maximální prostorové změny prostorové veličiny

$$f(x, y, z)$$

$$\text{grad } f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

- Hamiltonův operátor (nabla)
 - Symbolický diferenciální operátor, který umožňuje zjistit změnu dané veličiny v závislosti na prostorových souřadnicích x, y, z

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

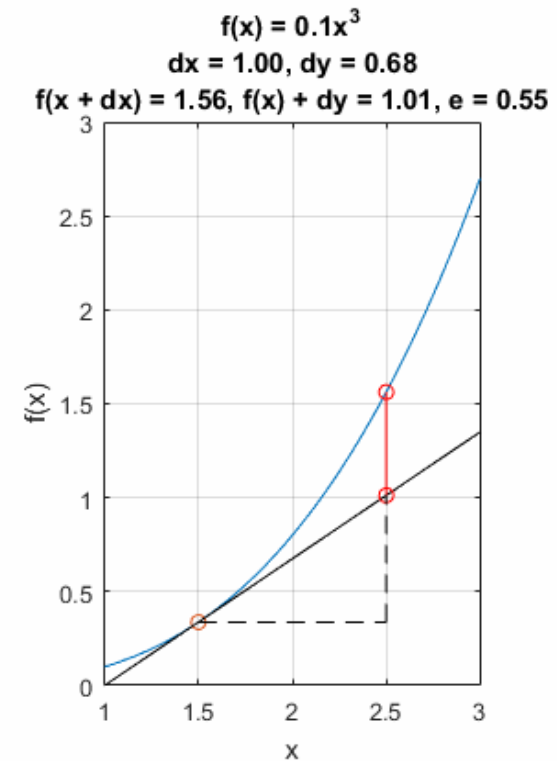
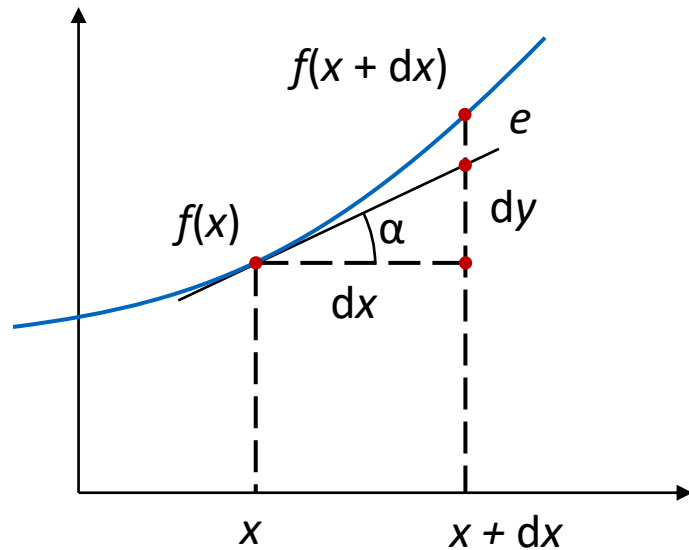
- Laplaceův operátor

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Základy diferenciálního počtu

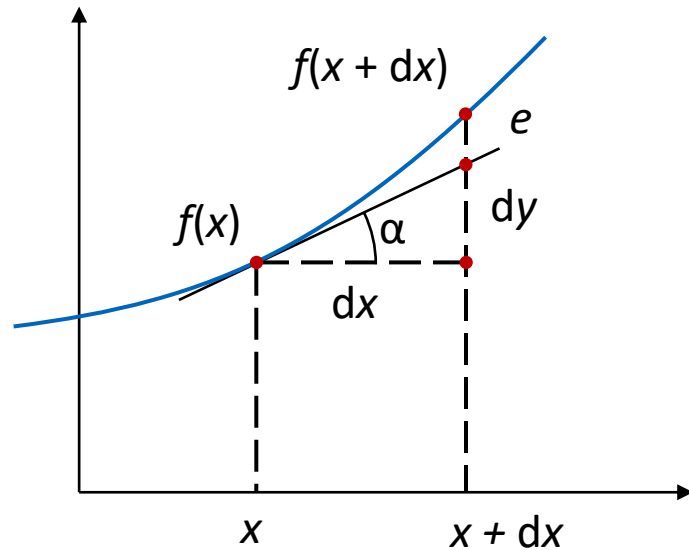
- Totální diferenciál

- Umožňuje určit, jak se změní výsledná veličina, která je vypočtena pomocí několika dílčích parametrů, v závislosti na změně některého z těchto parametrů o malou hodnotu
- Aplikace pro funkce několika proměnných
- V experimentální fyzice se používá pro charakterizaci vlivu chyb měření dílčích parametrů na výsledné hodnoty



Základy diferenciálního počtu

- Totální diferenciál – funkce jedné proměnné
 - Spojitá funkce $f(x)$, na okolí x existuje její derivace



$$f(x + dx) = f(x) + dy + e$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \tan \alpha$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

↑ Totální diferenciál

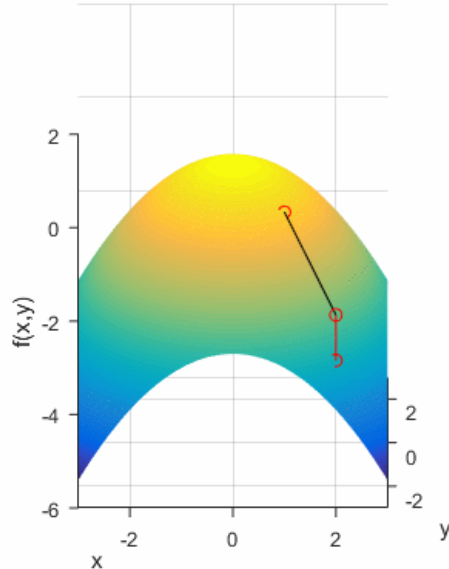
Základy diferenciálního počtu

- Totální diferenciál – funkce více proměnných

$$f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \dots) = f(x_1, x_2, \dots) + dy_1 + dy_2 + \dots + e$$

$$= f(x) + \text{grad}[f](x_1, x_2, \dots) \cdot dx + e$$

$f(x, y) = -0.3(x^2 + y^2)$, $dx = 1.00$, $dy = -1.50$, $dz = -1.50$
 $f(x + dx, y + dy) = -3.07$, $f(x, y) + dz = -2.10$, $e = 0.98$

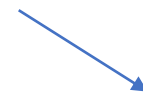


$$dy_j = f'_{xi}(x_1, x_2, \dots) \cdot dx_i$$



$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n = \nabla f(x) \cdot dx$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$$



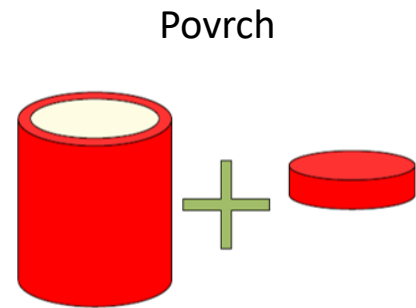
Gradient funkce

Základy diferenciálního počtu

- Je-li výsledná veličina popsána spojitou funkcí, pro kterou existují v daném bodě derivace, můžeme k určení její změny, v případě změny hodnoty některého z dílčích parametrů směrem od daného bodu, využít v prvním přiblížení totální diferenciál.
- Malá změna směrem od správně hodnoty = chyba měření.
- Totální diferenciál lze použít například k charakteristice vlivu chyb měření dílčích parametrů na výsledné hodnoty experimentu.

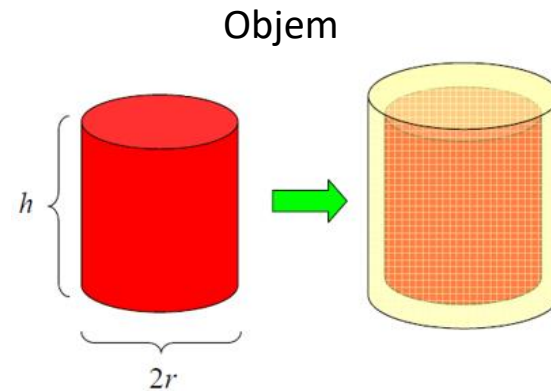
Základy diferenciálního počtu

- Příklad: jak se změní objem a povrch válečku, jestliže je jeho poloměr podstavy r měřen s chybou Δr a výška h s chybou Δh ? Předpokládejme, že obě chyby jsou dostatečně malé.



$$S = S_0 + \Delta S$$

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 + \Delta S$$



$$V = V_0 + \Delta V$$

$$V = \pi r^2 h + \Delta V$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$\Delta S \cong \frac{\partial S}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial S}{\partial h} \Delta h = (2\pi h + 4\pi r) \Delta r + 2\pi r \Delta h$$

$$\Delta V \cong \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Základy diferenciálního počtu

- Diferenciál vektoru
 - Ve fyzice často veličiny závisí na jiných veličinách a pro změnu vektorové funkce skalárního argumentu platí:

$$\frac{d\vec{a}_{(t)}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right) = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}$$



$$d\vec{a}_{(t)} = \vec{i}da_x + \vec{j}da_y + \vec{k}da_z$$



- Integrál

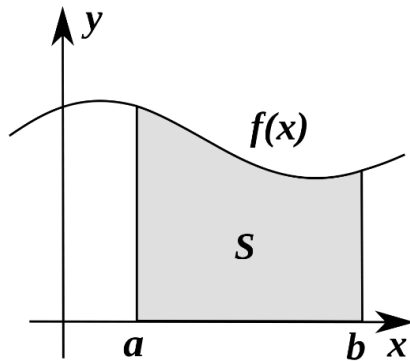
- Zobecnění pojmů jako plocha, objem či suma
- Určitý integrál lze ve zjednodušení chápat jako symbolický zápis součtu infinitezimálně malých elementů integrandu v rámci daných mezí.

Určitý integrál

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Neurčitý integrál

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$



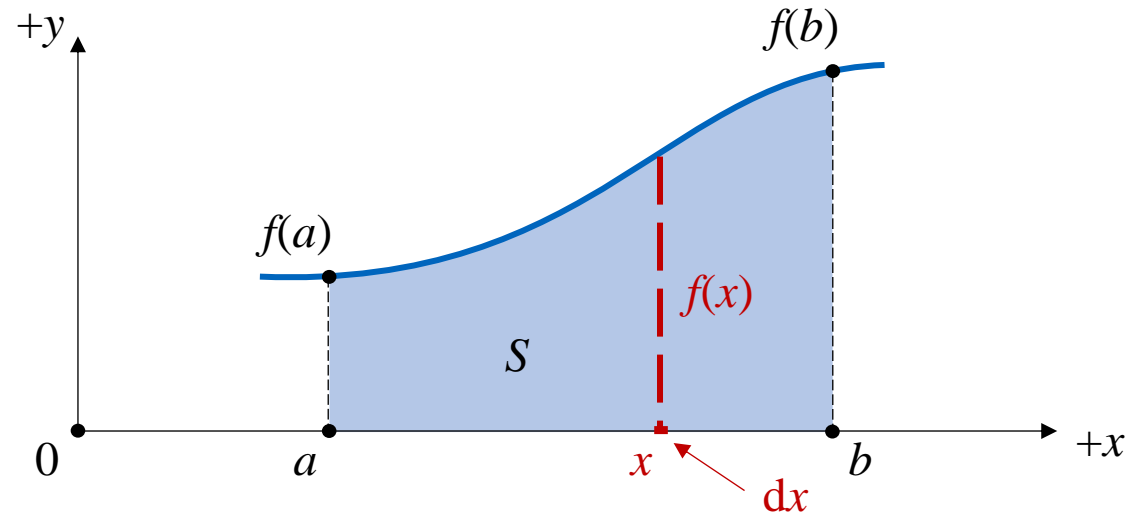
Základy integrálního počtu

- Jednoduchý integrál: plocha pod křivkou – součet elementů pod křivkou

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

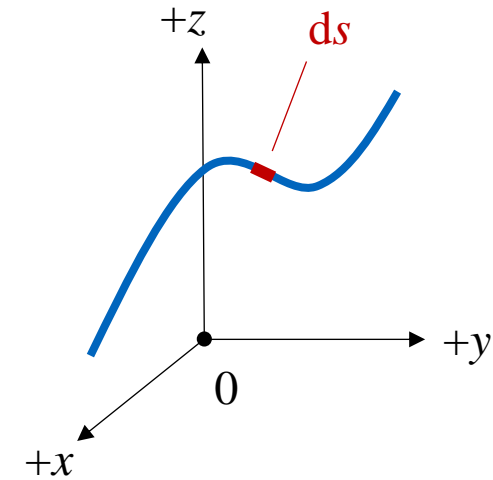
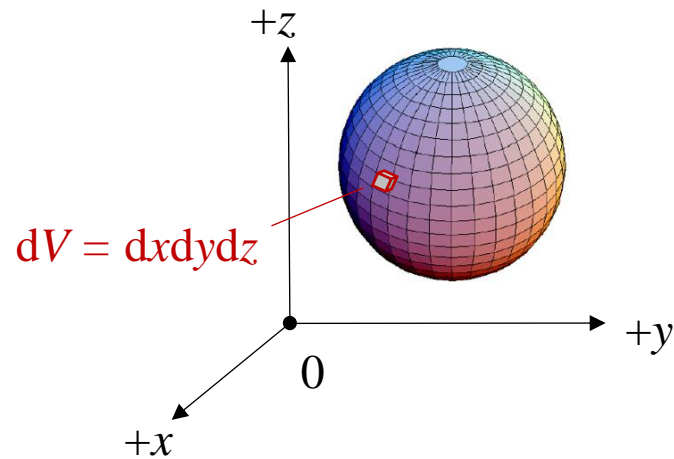
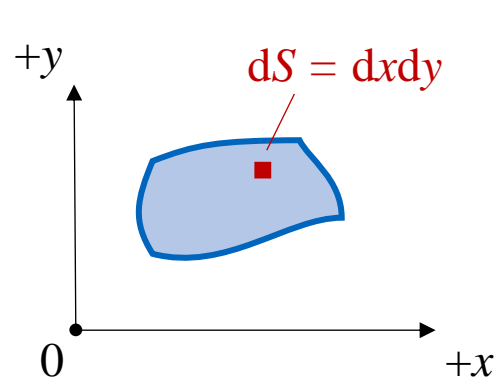
Plocha infinitezimálně
tenkého obdélníčku

$$dS = f(x) dx$$



Základy integrálního počtu

- Plošný integrál: součet elementů integrandu v ploše – součet přes plochu
- Objemový integrál: součet objemových elementů – objem ohraničený plochami
- Křivkový integrál: součet elementů po křivce



Základy integrálního počtu

- Seznam základních neurčitých integrálů

$$\int 0 \, dx = c$$

$$\int a \, dx = ax + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \text{ pro } x > 0, n \in \mathbb{R} \text{ a } n \neq -1. \text{ Pro přirozená } n \text{ platí uvedený vztah pro všechna } x.$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c \text{ pro } a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

Základy integrálního počtu

- Vztah mezi derivací a integrací

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \rightarrow \quad \int f'(x) dx = F(x) + c$$

$$dy = f'(x)dx \quad \rightarrow \quad \int dy = \int f'(x)dx$$

$$y = 1 + x^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 \quad \rightarrow \quad \int 3x^2 dx = x^3 + c$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}, \quad d\mathbf{v}(t) = \mathbf{a}(t)dt, \quad \mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)dt$$

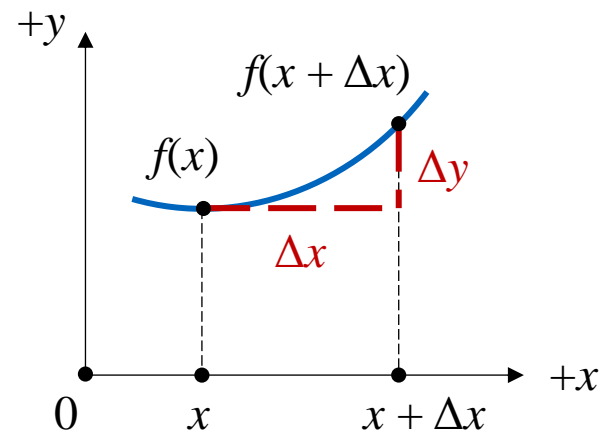
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}_0 dt = \mathbf{a}_0 \int dt = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{c}; \quad t = 0: \mathbf{v}(0) = \mathbf{c} = \mathbf{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 t$$

Numerický výpočet derivace a integrálu

- Numerický výpočet derivace

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Pokud známe 3 ekvidistantní body

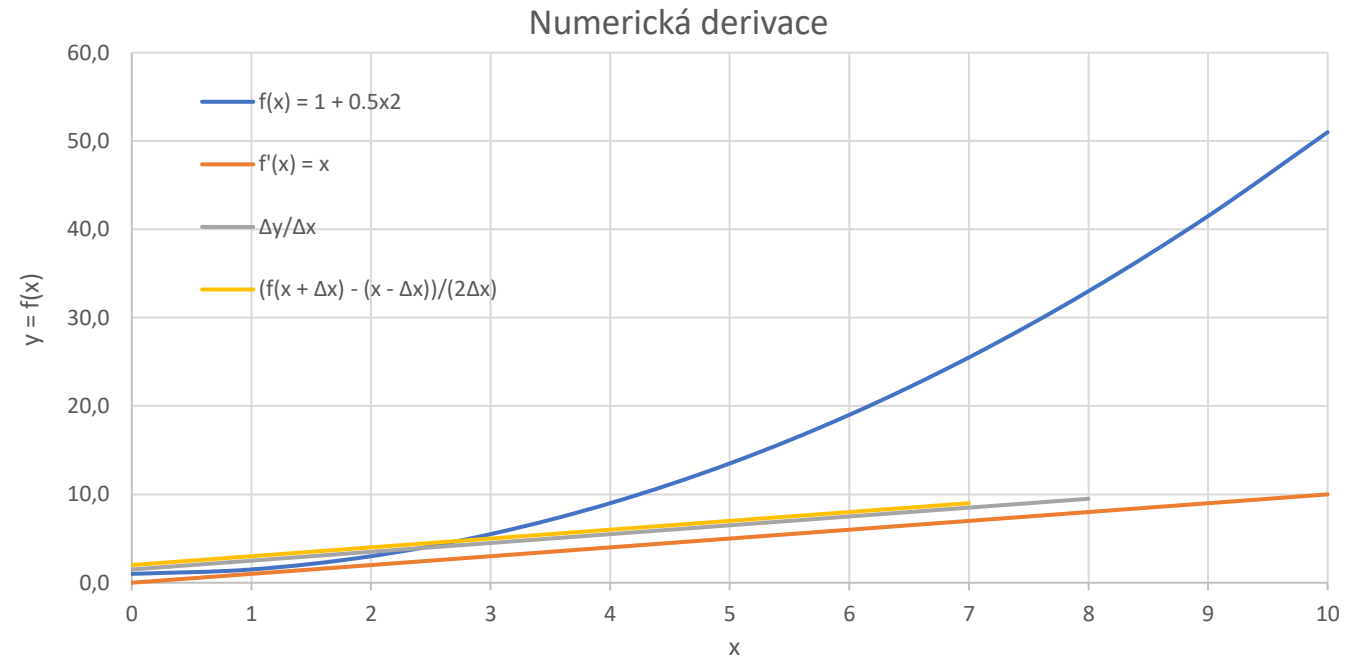
$$y' \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$y'' \approx \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Numerický výpočet derivace a integrálu

- Numerický výpočet derivace

x	$f(x) = 1 + 0.5x^2$	$f'(x) = x$	$\Delta y / \Delta x$	$(f(x + \Delta x) - (x - \Delta x)) / (2\Delta x)$
0	1.0	0	0.5	-
1	1.5	1	1.5	1
2	3.0	2	2.5	2
3	5.5	3	3.5	3
4	9.0	4	4.5	4
5	13.5	5	5.5	5
6	19.0	6	6.5	6
7	25.5	7	7.5	7
8	33.0	8	8.5	8
9	41.5	9	9.5	9
10	51.0	10	-	-

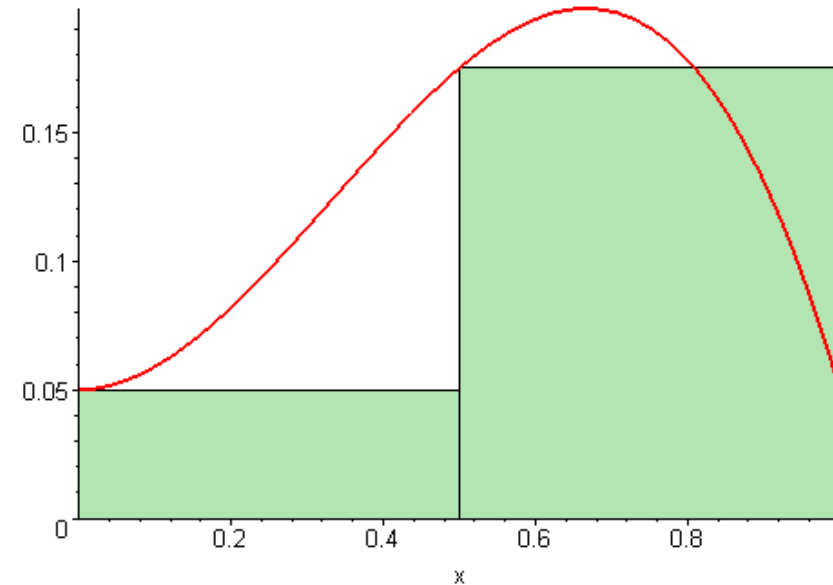


Numerický výpočet derivace a integrálu

- Numerický výpočet určitého integrálu
- Jednoduchý integrál: plocha pod křivkou – součet elementů pod křivkou

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_i dS_i$$

- Metody:
 - Obdélníková
 - Lichoběžníková
 - Simpsonova
 - Gaussova



Numerický výpočet derivace a integrálu

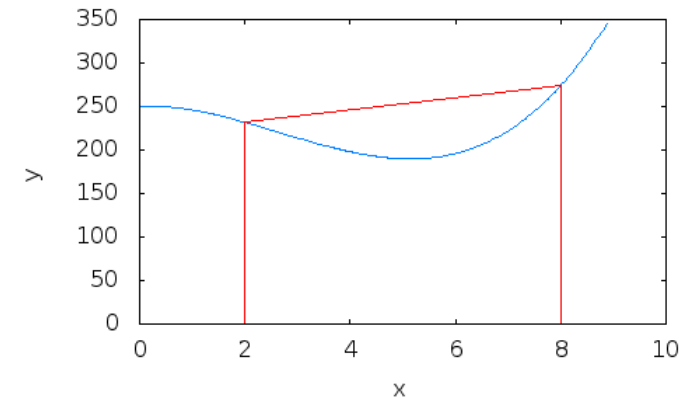
- Numerický výpočet určitého integrálu – lichoběžníková metoda
- Velmi jednoduchá a účinná metoda (vzhledem k výpočetním výkonům PC)
- Plocha mezi křivkou funkce $f(x)$ a vodorovnou osou souřadného systému se rozdělí na konečný počet lichoběžníků, jejich plocha je následně sečtena:

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i$$

- Pro rovnoměrně dělení osy x :

$$\Delta x_i = \text{konst.} = \Delta x = \frac{b-a}{N}$$

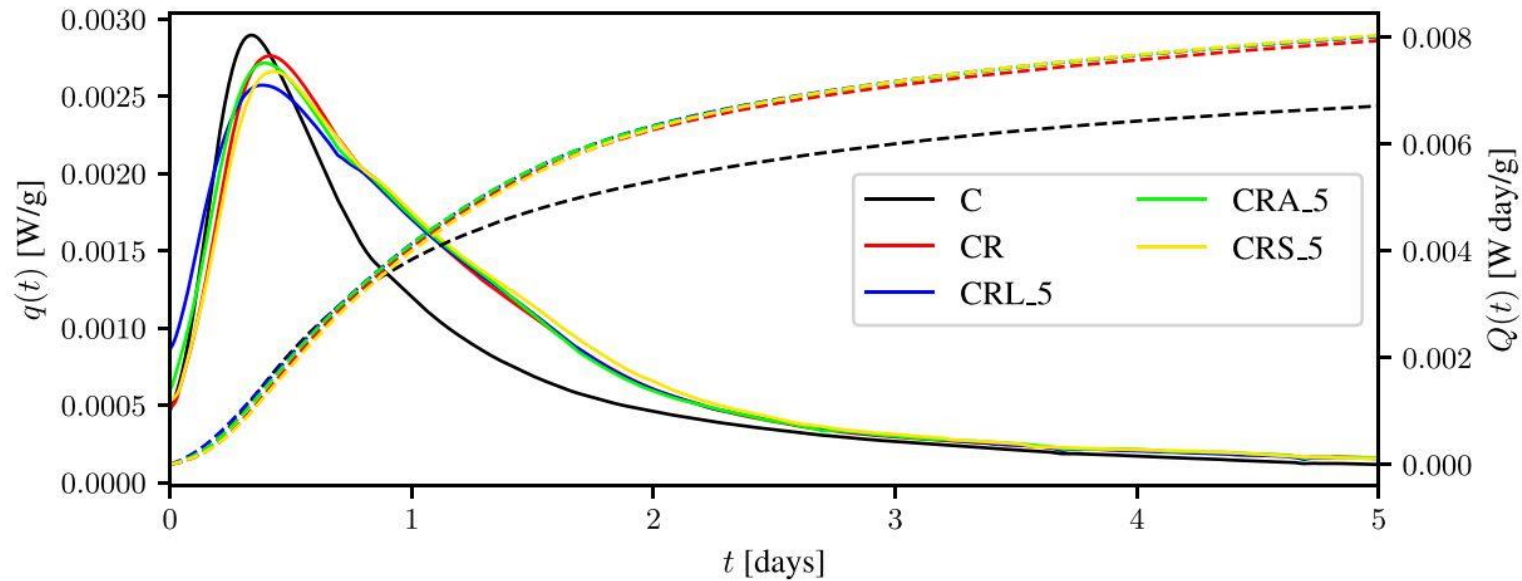
$$S \approx \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=1}^N [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + f(x_N) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right]$$



Numerický výpočet derivace a integrálu

- Ukázka aplikace numerického výpočtu integrálu
 - Celkové množství uvolněného tepla při hydrataci cementového pojiva
 - (Jednotka popisující kumulativní množství tepla není řádně upravena)

$$Q(t) = \int q(t) dt$$



Numerický výpočet derivace a integrálu

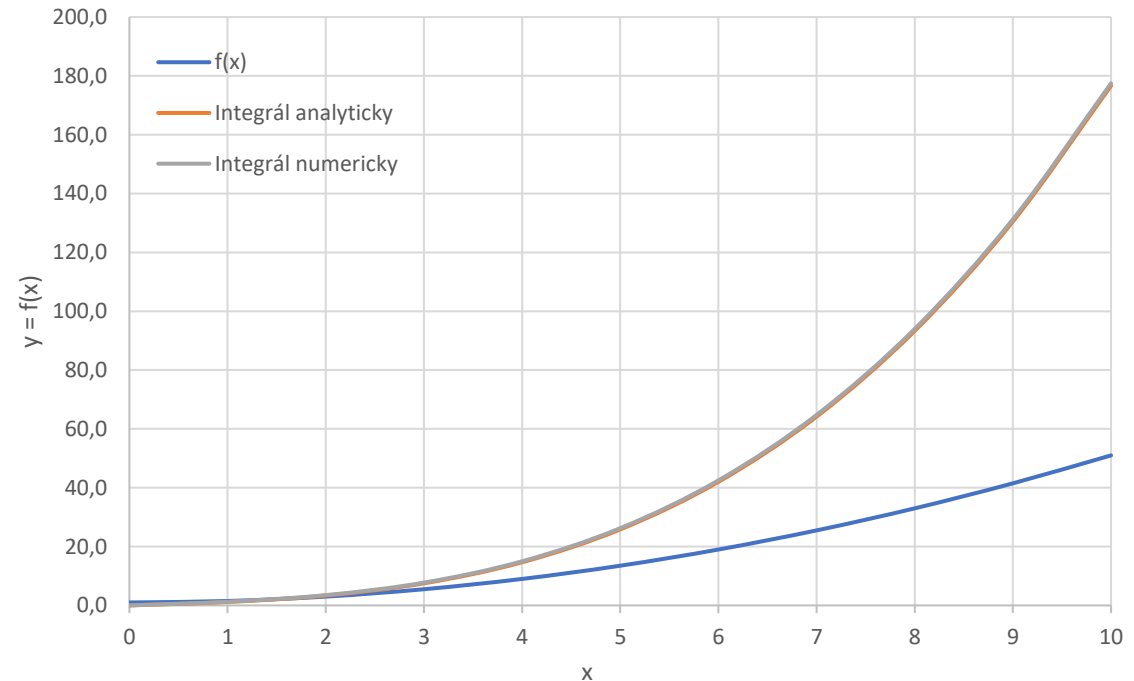
- Numerický výpočet určitého integrálu

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i$$

$$\int f(x) dx$$

x	$f(x) = 1 + 0,5x^2$	Analyticky	Numericky
0	1.0	0	0
1	1.5	1.2	1.25
2	3.0	3.3	3.5
3	5.5	7.5	7.75
4	9.0	14.7	15
5	13.5	25.8	26.25
6	19.0	42.0	42.5
7	25.5	64.2	64.75
8	33.0	93.3	94
9	41.5	130.5	131.25
10	51.0	176.7	177.5

Numerický integrál



4. cvičení

- Chyby měření
 - Špatná kalibrace měřidla
 - Poškození měřidla
 - Odečet hodnoty
 - Manipulace se vzorkem a měřidlem
 - Vily prostředí na objemové změny vzorku a měřidla



Chyby měření

- Hrubé chyby
 - Chybný odečet hodnoty
 - Chybný zápis hodnoty
 - Záměna jednotek
 - Poškození měřicího přístroje
- Systematické chyby
 - Špatná manipulace s měřicím přístrojem
 - Zanedbání okolních podmínek
 - Konstrukční nedokonalost přístroje
- Nahodilé chyby
 - Různé hodnoty za stejných podmínek
 - Přerušování měření
 - Reakční doba experimentátora
 - Malé změny podmínek (vnitřní změny přístroje)

Chyby měření

- Hrubé chyby

- Chybný odečet hodnoty
- Chybný zápis hodnoty
- Záměna jednotek
- Poškození měřicího přístroje

Nutno ihned eliminovat

- Systematické chyby

- Špatná manipulace s měřicím přístrojem
- Zanedbání okolních podmínek
- Konstrukční nedokonalost přístroje

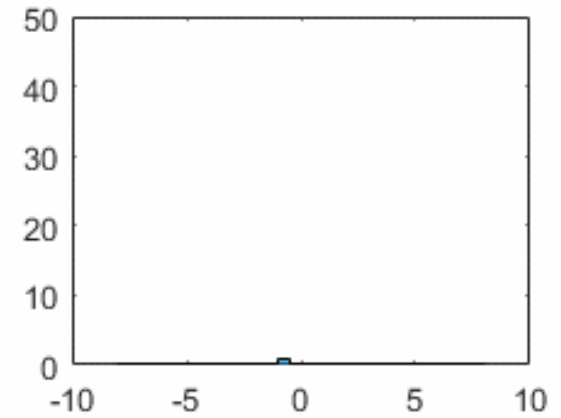
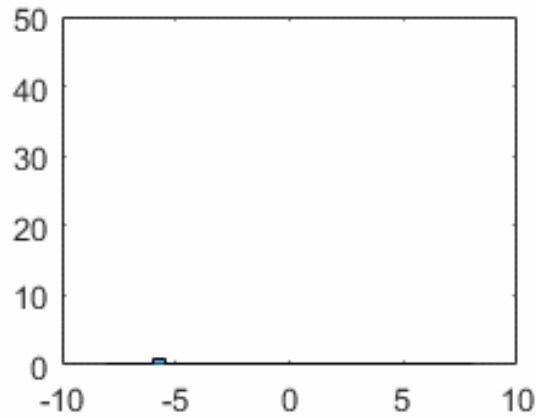
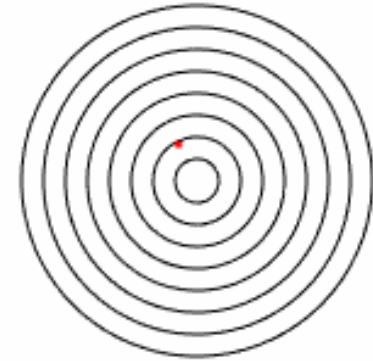
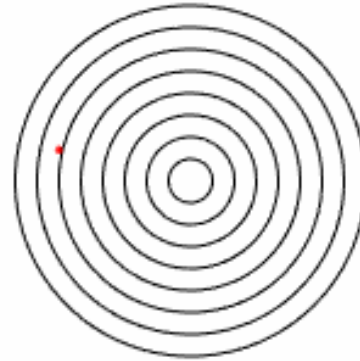
Částečně potlačit (opakovaná měření, kalibrace přístrojů, početní korekce, ...)

- Nahodilé chyby

- Různé hodnoty za stejných podmínek
- Přerušování měření
- Reakční doba experimentátora
- Malé změny podmínek (vnitřní změny přístroje)

Nelze eliminovat – odhad velikosti chyb, přiřazují se výsledkům měření → statistická analýza

Systematické vs. nahodilé chyby



Základní předpoklady práce s chybami

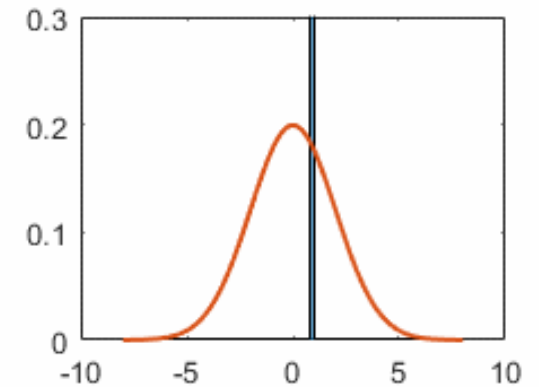
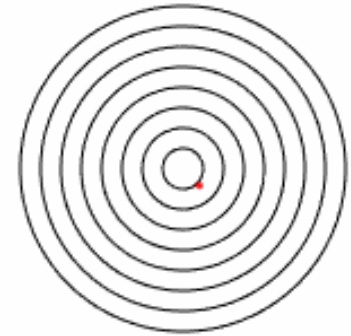
- Eliminace hrubých chyb
- Maximální potlačení systematických chyb
- Výskyt pouze nahodilých chyb
- Velké chyby jsou méně časté než malé
- Kladné a záporné chyby o stejných absolutních hodnotách jsou stejně pravděpodobné
- Neexistuje bezchybné měření
- Velikost nahodilých chyb je odhadována pomocí statistického zpracování
- Statistika určuje, s jakou pravděpodobností bude v měření chyba určité velikosti
- Velikost chyb se vždy odhaduje
- Výsledek měření zatížení náhodnou chybou je tzv. náhodná veličina
- Náhodná veličina se vyskytuje s určitou pravděpodobností

Základní předpoklady práce s chybami

- Pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(u) du$$

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny



Základní předpoklady práce s chybami

- Střední hodnota

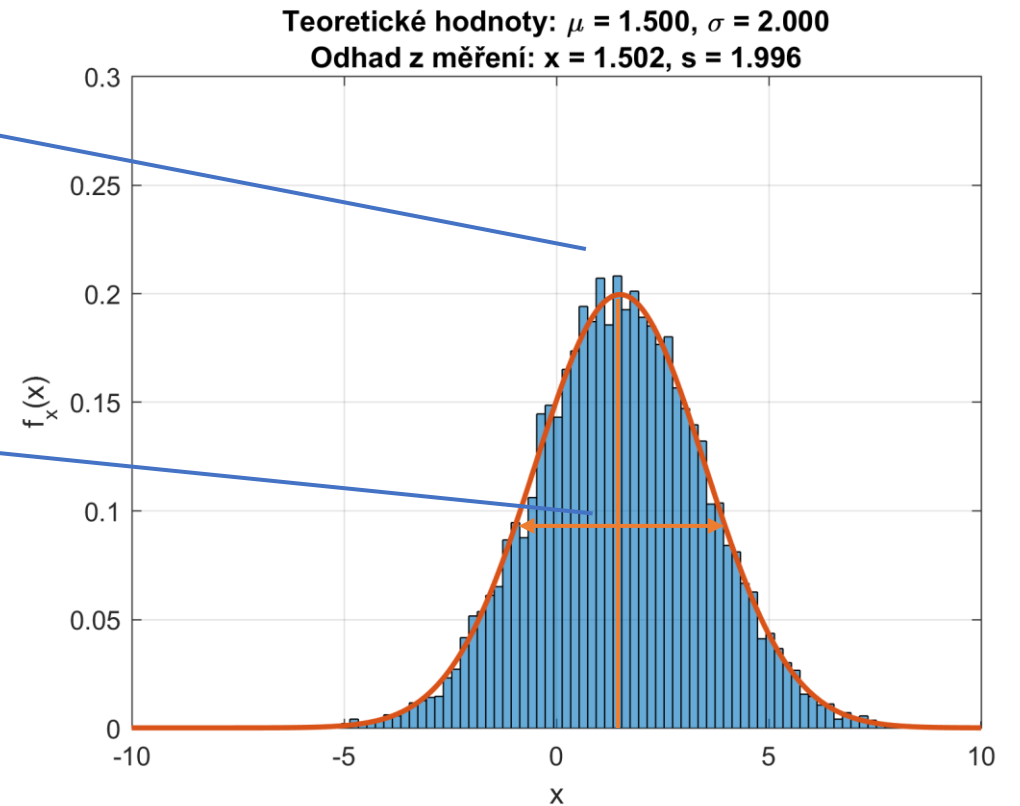
$$\mu = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_x(u) du$$

- Variance (rozptyl)

$$\sigma^2 = Var\{x\} = E\{(x - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_x(u) du$$

- Směrodatná odchylka

$$\sigma = \sqrt{Var\{x\}} = \sqrt{E\{(x - \mu)^2\}}$$



Struktura postupu při experimentálních měřeních

Soubor měření

Opakovaná **přímá měření**
vzdáleností, úhlů, teplot, tlaků,
...

*Příklad: měření teplotní
délkové roztažnosti*

*Základní délka vzorku,
protažení, teploty*



Odhad skutečných
hodnot

Odstranění (oprava) **hrubých chyb**, zpracování **vícenásobných měření**, výpočet **závislých veličin**, výpočet **parametrů** funkčních závislostí, ...

*Průměrování, výpočet
parametrů lineární závislosti
protažení se změnou teploty,
výpočet koeficientu teplotní
délkové roztažnosti*



Odhad nejistot

Nejistoty přímých měření,
přístrojů, odhad nejistot vlivem
experimentátora, vliv na
výsledné hodnoty, ...

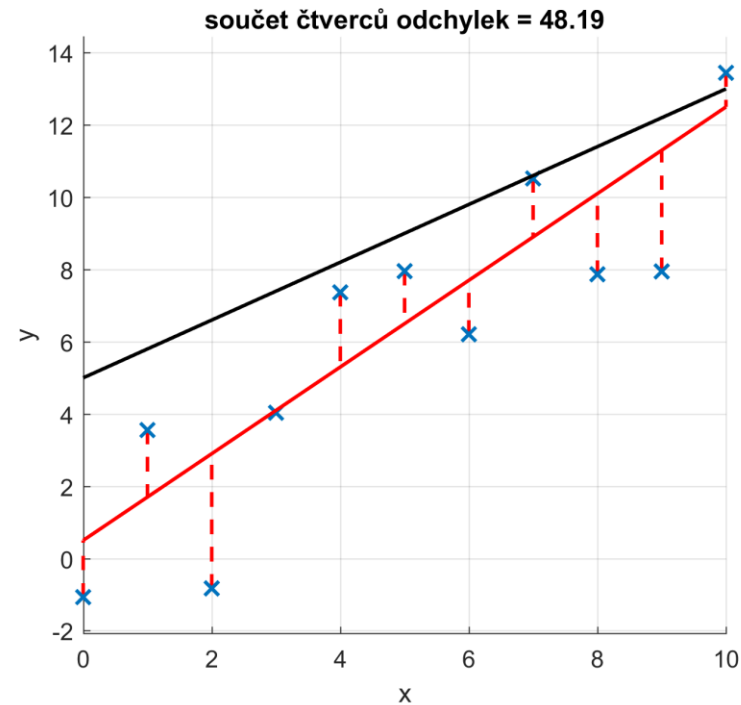
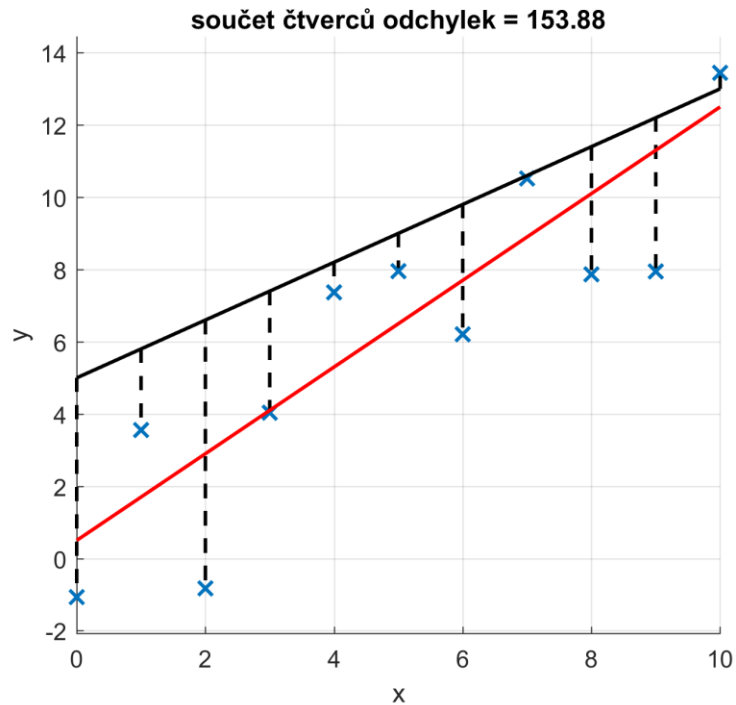
*Nejistoty přímo měřených
veličin (základní délka,
protažení, teploty), vliv
experimentátora, vliv na
výsledný koeficient*

Odhad skutečných hodnot

- Metoda nejmenších čtverců
- Vážený průměr
- Aritmetický průměr
- Metoda postupných měření

Metoda nejmenších čtverců

- Minimalizace sumy čtverců odchylek mezi měřenými daty a výsledným odhadem středních hodnot modelu



Metoda nejmenších čtverců

- Aproximace MNČ lineární závislostí procházející počátkem

$$y = f(x, a) = ax$$

$$y_i = f(x_i, \bar{a}) = \bar{a}x_i, \quad i = 1, \dots, N$$

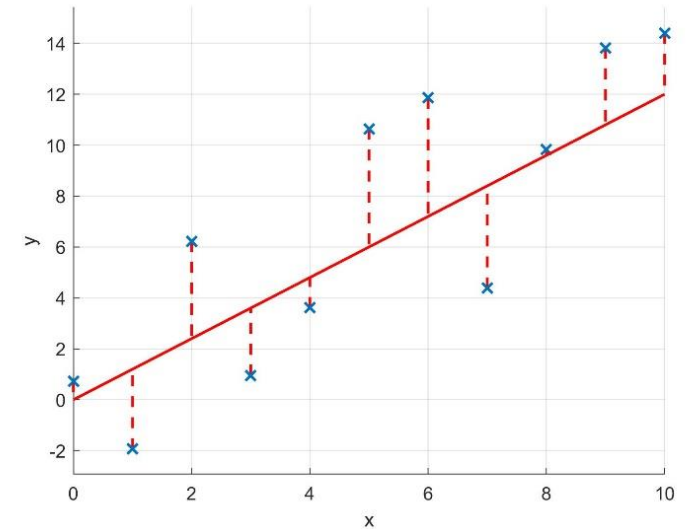
$$\varepsilon_i = y_i - \bar{a}x_i$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N p_i \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N p_i (y_i - \bar{a}x_i)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \bar{a}} = -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i (y_i - \bar{a}x_i) = -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i + 2\bar{a} \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 = 0$$

$$\bar{a} \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 = \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2}$$



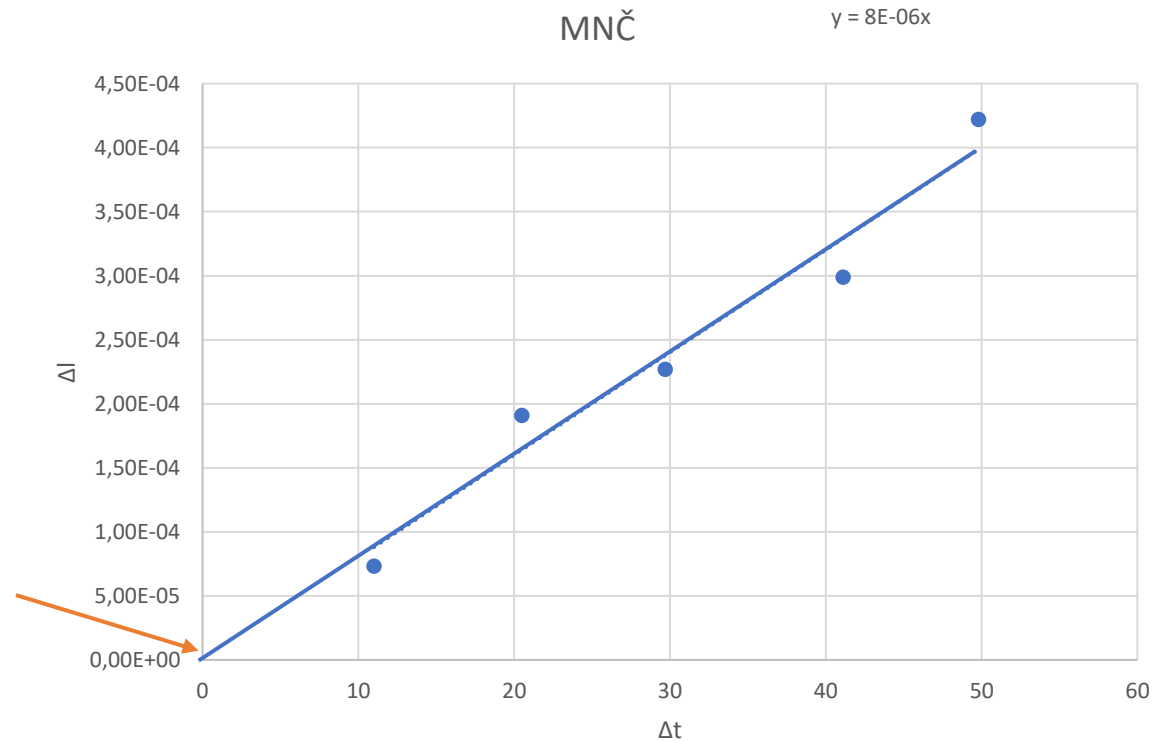
Metoda nejmenších čtverců

- Příklad: urči součinitel délkové teplotní roztažnosti α železné tyče o délce $l_0 = 0,5 \text{ m}$. Při experimentu postupného zahřívání tyče byly stanoveny následující hodnoty závislosti změny délky Δl na změně teploty ΔT :

	Δl_i	ΔT_i
1	7.32E-05	11.0
2	1.91E-04	20.5
3	2.27E-04	29.7
4	2.99E-04	41.1
5	4.22E-04	49.8

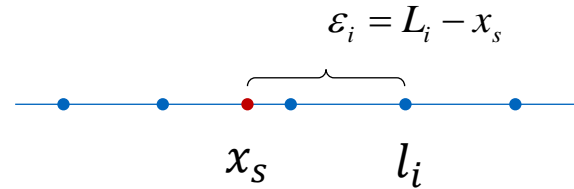
$$\Delta l = \alpha \Delta T l_0$$

Aproximační přímka pochází počátkem



Vážený a aritmetický průměr

- Vážený průměr



- Aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N L_i}{N}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N p_i (L_i - x_s)^2$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial x_s} = -2 \sum_{i=1}^N p_i (L_i - x_s) = -2 \sum_{i=1}^N p_i L_i + 2 \sum_{i=1}^N p_i x_s = 0$$

$$x_s \sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N p_i L_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i L_i}{\sum_{i=1}^N p_i}$$

Metoda postupných měření

- Pro navazující měření – koncový bod jednoho je navazujícím bodem druhého
- Pro sudý počet měření (pro lichý je nutné vynechat první nebo jiné)

x_1	x_{k+1}	$\Delta_1 = x_{k+1} - x_1$
x_2	x_{k+2}	$\Delta_2 = x_{k+2} - x_2$
\vdots	\vdots	\vdots
x_{k-1}	x_{N-1}	$\Delta_{k-1} = x_{N-1} - x_{k-1}$
x_k	x_N	$\Delta_k = x_N - x_k$

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N \quad k = N/2$$

$$\Delta_i = x_{k+i} - x_i$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta_i}{k} = \frac{x_{k+i} - x_i}{k}$$

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta x_i \quad \text{Nejlepší odhad přírůstku}$$

$$= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k \Delta_i = \frac{1}{k^2} \left(\sum_{i=k+1}^{2k} x_i - \sum_{i=1}^k x_i \right) = \frac{4}{N^2} \left(\sum_{i=N/2+1}^N x_i - \sum_{i=1}^{N/2} x_i \right)$$

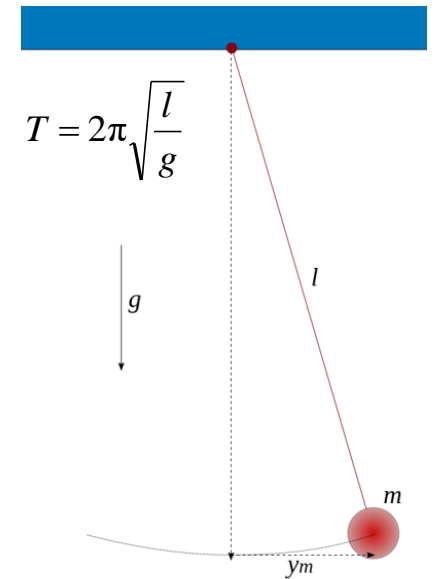
Metoda postupných měření

- Příklad: z postupně naměřených hodnot času urči dobu kyvu T kyvadla.

$N=10$

Postupně měřené časy		$\Delta_i = t_{k+i} - t_i$ [s]	$\Delta t_i = \Delta_i / k$ [s]
1,000	5,999	4,999	0,9998
2,010	7,002	4,992	0,9984
3,005	8,005	5,000	1,0000
3,998	9,001	5,003	1,0006
5,001	10,000	4,999	0,9998

$$\bar{T} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta t_i = 0,99972 \text{ s}$$



Odhad nejistot



Zákon přenášení variací

- Statistický nástroj pro určení vlivu nejistoty dílčích parametrů na výslednou hodnotu, která je na těchto parametrech funkčně závislá
- Podmínky pro možnost použití zákona o přenášení variací:
 - Dílčí parametry jsou nezávislé
 - Chyby dílčích náhodných veličin jsou malé vzhledem k výsledným funkčním hodnotám a mají nulovou střední hodnotu.
 - Vliv malé změny dílčí veličiny na výslednou hodnotu je malý a lze vyjádřit pomocí totálního diferenciálu (tj. funkce charakterizující danou závislost musí být diferencovatelná na okolí daného dílčího bodu).

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 \sigma^2(x_N)}$$

Nejistoty měřených parametrů

- Nejistota typu A:

- Vychází ze statistického zpracování dat
- Odhad směrodatné odchylky σ
- Výpočet výběrové směrodatné odchylky s

} Standardní nejistota určená metodou typu A (u_A)

- Nejistota typu B:

- Vychází ze zkušenosti operátora, kalibračního protokolu, analýzy empirických pozorování

Standardní nejistota určená metodou typu B (u_B)

- Nejistota typu C:

- Využívá zákon přenášení variací
- Předpoklad: u_A nemá souvislost s u_B

Kombinovaná nejistota určená metodou typu C (u_C)

Nejistoty měřených parametrů

- Rozšířená nejistota:
 - Pro normální rozdělení platí 68% interval spolehlivosti

$$(\bar{x} - u_C) \leq x_s \leq (\bar{x} + u_C)$$

- Rozšířený interval spolehlivosti

$$(\bar{x} - k_p u_C) \leq x_s \leq (\bar{x} + k_p u_C)$$

$$U = k_p u_C$$

pro normální rozdělení

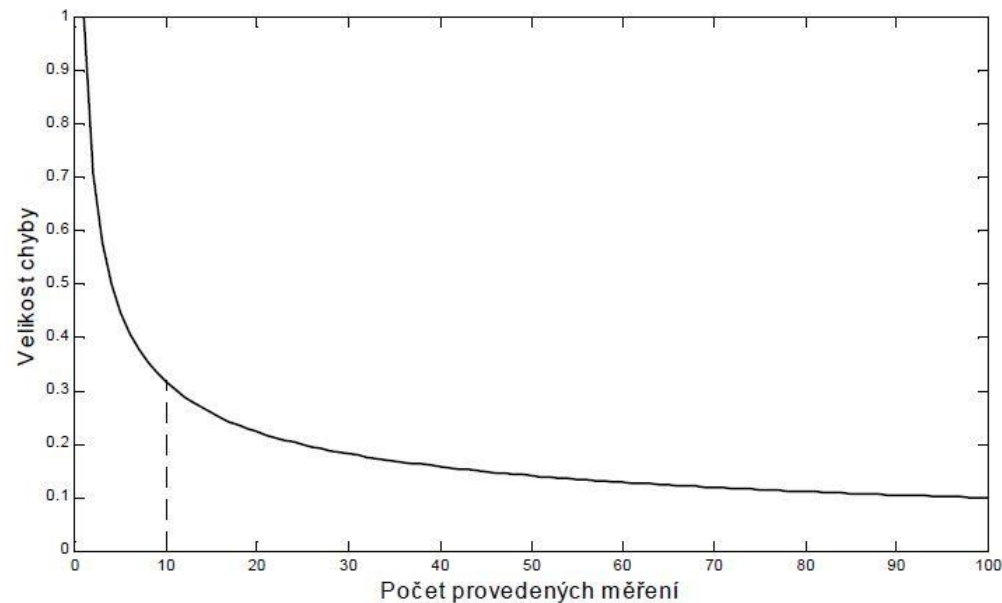
P = 95%

k_p	0.674	1	1.96	2	2.576	3
P	0.500	0.683	0.950	0.955	0.990	0.997

Metoda typu A

- Odpovídá odhadu směrodatné odchyly pravděpodobnostního rozdělení chyby daného měřeného parametru – výběrová směrodatná odchylnka
- Předpoklad normálního pravděpodobnostního rozdělení
- Odhad střední hodnoty parametru je dán aritmetickým průměrem
- Velikost chyby se s počtem měření zmenšuje

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$



Metoda typu B

- Odhad nejistot měřicích pomůcek, měřiče, atd.
- Využití dostupných informací – kalibrační protokoly, specifikace od výrobce, zkušenosti, atd.
- Standardní nejistota vyjádřena odhadem směrodatné odchylky rovnoměrného pravděpodobnostního rozdělení.



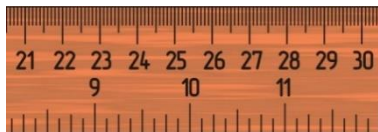
velikost intervalu, na kterém očekáváme stejnou pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny (rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení)

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

Metoda typu B

- Nejistota z rozlišení přístroje
 - Žádné informace o přístroji
 - Předpoklad rovnoměrného pravděpodobnostního rozdělení pro odečítanou nejmenší hodnotu

$$\Delta = 1 \text{ mm}$$



$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta'}{\sqrt{3}}$$

- Nejistota u ručičkového přístroje
 - Přesnost dána třídou přesnosti
 - Maximální relativní velikost chyby při výchylce v krajní poloze



$$\Delta = 2 \times (\text{rozsah stupnice}) \times \text{TP} / 100$$

$$\Delta' = (\text{rozsah stupnice}) \times \text{TP} / 100$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta'}{\sqrt{3}}$$

Metoda typu B

- Nejistota u digitálního přístroje



$$\Delta = 2 \times (p\% \text{ z měřené hodnoty} + n \text{ digitů})$$

$$\Delta' = (p\% \text{ z měřené hodnoty} + n \text{ digitů})$$

hodnoty p a n dány výrobcem,
 n digitů = n násobek rozlišovací schopnosti

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta'}{\sqrt{3}}$$

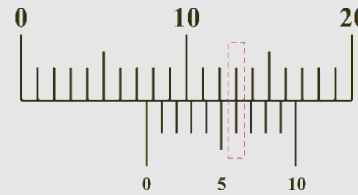
Nejistoty jednotlivých měřicích pomůcek pro laboratorní cvičení jsou uvedeny zde:

http://departments.fsv.cvut.cz/k102/sites/default/files/k102/vyuka/predmety/soubory/GD1 - Nejistoty_mericich_pomucek_0.pdf

Metoda typu B

- Příklady

1. posuvné měřítko s noniem (vernierem)



$$x = 7,6 \text{ mm}$$

$$\Delta = 0,1 \text{ mm}$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta'}{\sqrt{3}}$$

$$u_B(x) = \frac{0,1}{\sqrt{12}} = 0,03 \text{ mm}$$

2. analogový (ručičkový) ampérmetr

rozsah stupnice = $100 \mu\text{A}$

TP = 2,5

$$u_B(I) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} = \frac{2 \times (\text{rozsah stupnice}) \times \text{TP} / 100}{\sqrt{12}}$$

$$u_B(I) = \frac{2 \times 100 \mu\text{A} \times 2,5 / 100}{\sqrt{12}} = 1,4 \mu\text{A}$$



3. digitální voltmetr

dáno výrobcem: $p = 0,5$, $n = 1$

$\Delta = 2 \times (p\% \text{ z měř. hodnoty} + n \text{ digitů})$

$\Delta' = (p\% \text{ z měř. hodnoty} + n \text{ digitů})$

$$u_B(U) = \frac{2 \times (1,305 \text{ mV} \times 0,5 / 100 + 0,001)}{\sqrt{12}} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ mV} = 4,3 \mu\text{V}$$



Metoda typu C – kombinovaná nejistota

1. Měříme náhodnou veličinu (chyby měření jsou náhodné veličiny)
2. Získané hodnoty statisticky zpracujeme → odhad nejistoty typu A
3. Započetí dalších vlivů → odhad nejistoty typu B
4. Kombinace obou vlivů → kombinovaná nejistota přímých měření, nejistota typu C

- Chyba ε_i -tého přímého měření x_i se skládá z vlivu A – ε_A a vlivu B – ε_B

$$\varepsilon_i = \varepsilon_A + \varepsilon_B$$

$$x_i = x_s + \varepsilon_i = x_s + \varepsilon_A + \varepsilon_B$$

Zákon přenášení variancí

- Kombinovaná nejistota přímého měření

$$u_C^2(x_i) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_A} \right)^2 u_A^2(x_i) + \left(\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon_B} \right)^2 u_B^2(x_i) = u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)$$

$$u_C(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)}$$

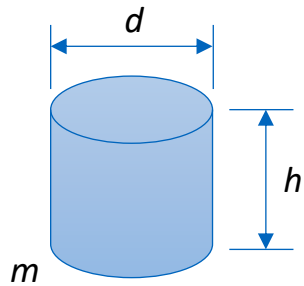
- Kombinovaná nejistota aritmetického průměru

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad u_C^2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_i} \right)^2 u_C^2(x_i) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 u_C^2(x_i) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N u_C^2(x_i) = \frac{N u_C^2(x)}{N^2} = \frac{u_C^2(x)}{N}$$

$$u_C(\bar{x}) = \frac{u_C(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{u_A^2(x) + u_B^2(x)}{N}}$$

Příklad

Přímým měřením rozměrů a hmotnosti válečku určete hustotu, ze které je daný vzorek vyroben, a vypočtete nejistotu výsledné hustoty.



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}$$

Měření	d [mm]	[h] mm	m [g]
1	31.92	30.44	64.845
2	31.91	30.45	64.848
3	31.92	30.43	64.846

Příklad

Postup výpočtu:

1. Odhad skutečné hodnoty přímo měřené veličiny
2. Odhad nejistoty určený metodou typu A (odhad směrodatné odchylky daného pravděpodobnostního rozdělení)
3. Odhad nejistoty určený metodou typu B
4. Výpočet kombinované nejistoty pomocí zákona přenášení variancí
5. Výpočet rozšířené nejistoty (pokud hodnotu dále nepoužíváme)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

$$u_C(\bar{x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + u_B^2(x)}$$

$$U(x) = k_p u_C(\bar{x})$$

Příklad

- Výpočet aritmetického průměru všech přímo měřených veličin d , h , m

- Funkce v Excelu: PRŮMĚR

Měření	d [mm]	[h] mm	m [g]
1	31.92	30.44	64.845
2	31.91	30.45	64.848
3	31.92	30.43	64.846

Průměr	d [mm]	[h] mm	m [g]
	31.917	30.440	64.846

- Nejistota typu A – výběrová směrodatná odchylka

- Funkce v Excelu: SMODCH.VÝBĚR (alt: SMODCH.VÝBĚR.P)

u_A	d [mm]	[h] mm	m [g]
	0.006	0.010	0.002

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

$$u_C(\bar{x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + u_B^2(x)}$$

$$U(x) = k_p u_C(\bar{x})$$

Příklad

- Nejistota typu B

- $\Delta_d = 0,01$ mm
- $\Delta_h = 0,01$ mm
- $\Delta_m = 0$ g

u_B	d [mm]	[h] mm	m [g]
	0.003	0.003	0.000

- Nejistota typu C

u_C	d [mm]	[h] mm	m [g]
	0.004	0.006	0.001

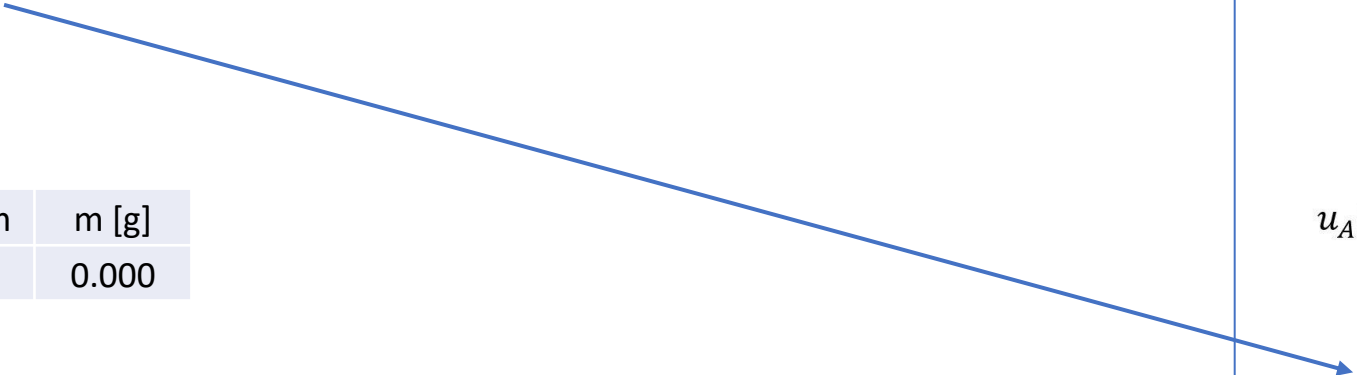
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

$$u_C(\bar{x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + u_B^2(x)}$$

$$U(x) = k_p u_C(\bar{x})$$



Příklad

- Výpočet výsledné hustoty

Průměr	d [mm]	[h] mm	m [g]
	31.917	30.440	64.846
u_c	d [mm]	[h] mm	m [g]
	0.004	0.006	0.001

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h} = 2662,66 \text{ kg/m}^3$$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 \sigma^2(x_N)}$$

$$u_c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 u_c^2(m) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 u_c^2(d) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)^2 u_c^2(h)} = \rho \sqrt{\frac{u_c^2(m)}{m^2} + 4 \frac{u_c^2(d)}{d^2} + \frac{u_c^2(h)}{h^2}} = 0,82 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{4}{\pi d^2 h} = \frac{\rho}{m}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial d} = -\frac{8m}{\pi d^3 h} = -\frac{2\rho}{d}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial h} = -\frac{4m}{\pi d^2 h^2} = -\frac{\rho}{h}$$

Příklad

- Výpočet rozšířené nejistoty

$$U_{95\%}(\rho) = 1,96 \times u_C(\rho) = 1,60 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho = 2662,66 \pm 1,60 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$$

$$u_C(\bar{x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{x}) + u_B^2(x)}$$

$$U(x) = k_p u_C(\bar{x})$$

Metoda typu A

- **Metoda postupných měření**

- U hodnocení nejistoty výsledku metody postupných měření využijeme výpočet nejistoty aritmetického průměru a zákon přenášení variancí.
- Při MPM z hodno Δx_i počítáme průměr

$$\Delta x_i = \frac{\Delta_i}{k} = \frac{x_{k+i} - x_i}{k} \longrightarrow \overline{\Delta x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta x_i$$

k je počet dvojic měření

$$u_A(\Delta x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2}{k-1}}$$

$$u_A(\overline{\Delta x}) = \frac{u(\Delta x_i)}{\sqrt{k}}$$

Odhad nejistoty aritmetického průměru

Metoda typu B

- Metoda postupných měření
 - Vliv nejistoty jednoho měření na výsledek MPM

- Jedno měření x_i $u_B(x_i)$

- Rozdíl $\Delta_i = x_{k+i} - x_i$ $u_B(\Delta_i) = \sqrt{2}u_B(x_i)$

- Dělení $\Delta x_i = \frac{\Delta_i}{k} = \frac{x_{k+i} - x_i}{k}$ $u_B(\Delta x_i) = \frac{\sqrt{2}u_B(x_i)}{k}$

- Průměr $\overline{\Delta x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta x_i$ $u_B(\overline{\Delta x}) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{k}} u_B(x_i)$

Vliv jednoho měření na MPM

Metoda typu C

- Metoda postupných měření
 - Kombinovaná nejistota pro MPM

$$u_C(\bar{\Delta x}) = \sqrt{u_A^2(\bar{\Delta x}) + u_B^2(\bar{\Delta x})}$$

Statistické zhodnocení + vliv jednoho měření na MPM

Prezentace výsledků



- Přehledné tabulky a grafy (Excel, MATLAB)
- Optimální počet platných cifer
- Odevzdávání řešených úloh ve formě protokolu
 - Hlavička protokolu
 - Teoretický úvod (fyzikální princip měření, postup, podmínky, pomůcky)
 - Vypracované měření (přehledné zpracování, tabulky mezivýsledků a výsledků, grafy, výpočet nejistot)
 - Závěr (shrnutí výsledků a jejich nejistot, porovnání s tabulkovými hodnotami, vysvětlení případných odchylek, ...)
 - Použitá literatura
 - Signatura
 - Přílohy

FAKULTA STAVEBNÍ, KATEDRA FYZIKY
102FY1G Fyzika G



1. Určení vlnové délka světla pomocí difrakční mřížky

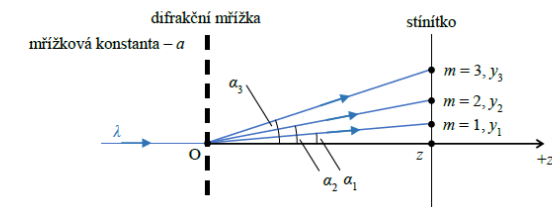
Petr Pokorný, Pavel Kulmon, Filip Šmejkal
LS 2016/17, skupina 1, datum měření: 19. 2. 2017

Zadání

Pomocí difrakční mřížky určete vlnovou délku zdroje záření (laserové ukazovátka). Pro výpočet použijte metodu nejmenších čtverců. Odhadněte nejistotu výsledné vlnové délky pro 95%ní interval spolehlivosti.

Teoretický úvod

Difrakce na mřížce



Prezentace výsledků

- Musí být ihned zřejmé, co se měří a v jakých jednotkách

Měřená veličina

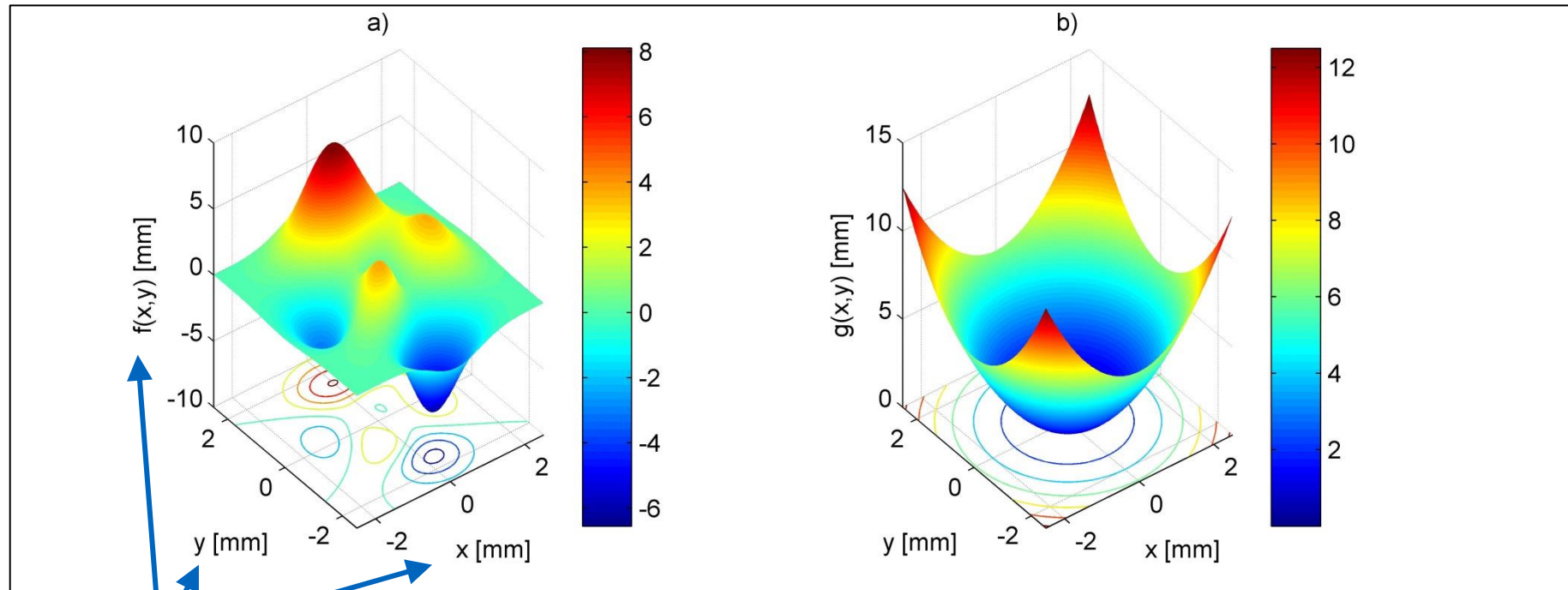
i	x_i [mm]
1	7,60
2	7,50
3	7,60
4	7,60
5	7,70
<hr/>	
Průměr (\bar{x})	7,60

Jednotky (stojať v hranatých závorkách)

Zvýraznění výsledku

Prezentace výsledků

- Označení a popis grafů



Popisy os i s jednotkami

Název grafu (obrázku)

Obr. 1 Zobrazení a) funkční závislosti $f(x,y)$ a b) závislosti $g(x,y)$ na poloze

Prezentace výsledků

- Operace s ciframi
- Odhad skut. hodnoty – stejný počet des. míst jako u odhadu nejistoty

Odhad skutečné hodnoty

$$x = (\bar{x} \pm u_c) [x]$$

Odhad kombinované nejistoty
(rozšířené nejistoty)

Jednotky výsledné veličiny

Planckova konstanta: $h = 6,615277837 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $u(h) = 2,886384924 \cdot 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{s}$

$$u(h) = 2,9 \cdot 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{s} = 0,029 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \rightarrow h = 6,615 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$h = (6,615 \pm 0,029) \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- Citace literatury

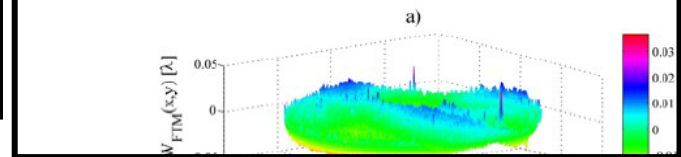
Odkazy v textu

, $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, M$, is the position of corner points. The phase is calculated by the following formula^{4,15}:

$$I(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \cos[2\pi \mathbf{f}_0 \mathbf{r} + \phi(\mathbf{r})],$$

where $I(\mathbf{r})$ is the intensity, $b(\mathbf{r})$ the amplitude variation, \mathbf{f}_0 the linear frequency vector. It is assumed that $a(\mathbf{r})$, $b(\mathbf{r})$ and $\phi(\mathbf{r})$ are varying slowly compared

to the carrier frequency. The phase is calculated by the phase-shifting algorithm (PSA) [5] and PQF of reference surface [6]. The results are shown in Fig. 5. The software MetroPro [3] was used for the evaluation.



Seznam v závěru práce

LITERATURA

- [1] G. F. Marshall and G. E. Stutz, *Handbook of optical and laser metrology* (Taylor & Francis, Boca Raton, 2011), Vol. 147.
- [2] G. Vosselman and H.-G. Maas, *Airborne and terrestrial laser scanning* (CRC Press, Boca Raton, 2010).
- [3] P. Pokorný, "One-mirror and two-mirror three-dimensional phase-shifting interferometry: accuracy of laser beam spot," *Appl. Opt.* **53**, 2730-2734 (2014).
- [4] A. Mikš a P. Pokorný, "3D optické skenery," *Jemná mechanika* (2012).

References

1. P. Hariharan, *Optical interferometry* (Academic Press, 2003).
2. D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram analysis for optical testing* (CRC Press, 2005).
3. D. Malacara, *Optical shop testing* (Wiley, 2006).
4. R. S. Sirohi, *Optical methods of measurement* (CRC Press, 2009).
5. J. Novák, P. Novák, A. Mikš, "Generalized carré multi step phase shifting algorithms," in *Interferometry Principles and Applications* (Nova Science Publisher, 2012), pp. 447-470.



**FACULTY OF CIVIL
ENGINEERING
CTU IN PRAGUE**

Konec

Za podklady pro přípravu prezentace děkuji Ing. Petru Pokornému, Ph.D.

