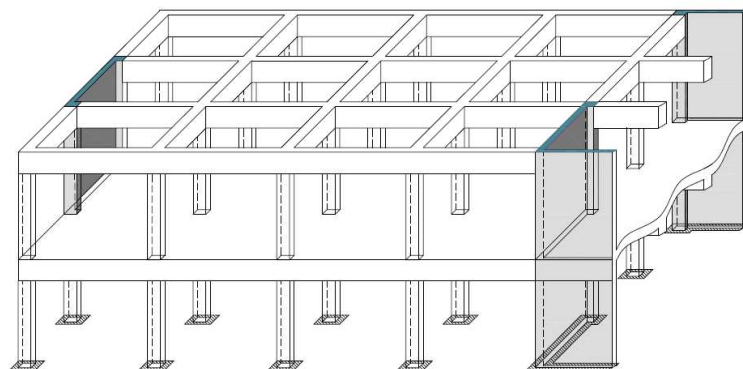




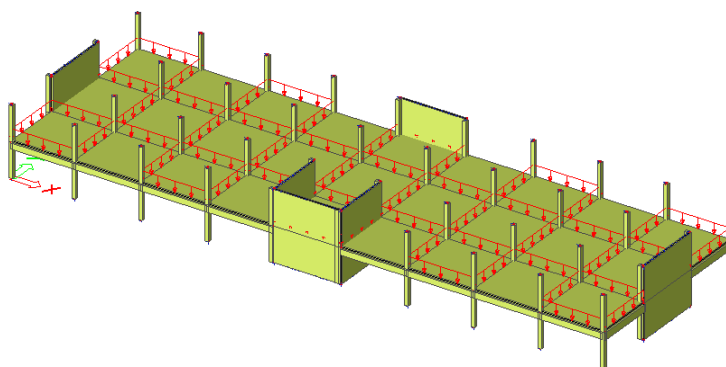
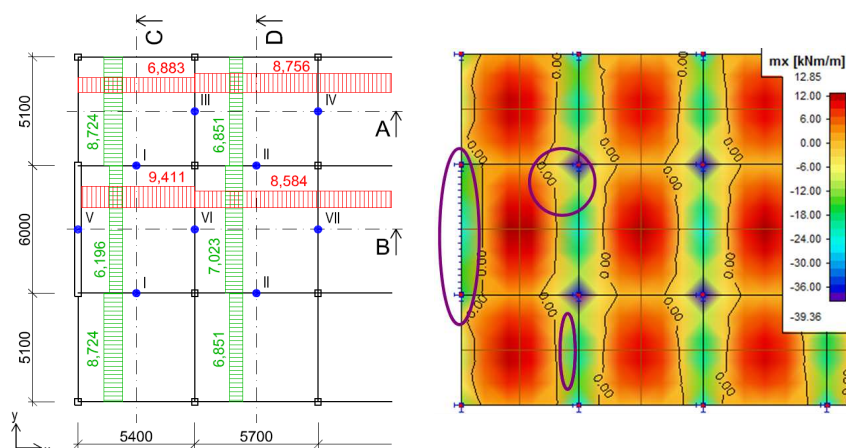
ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE



Základní typy betonových konstrukcí pozemních staveb se vzorovými příklady

3. SROVNÁVACÍ STUDIE

Řešení po obvodě nepoddajně podepřené ŽB stropní desky



projekt FRVŠ 294/2012/G1

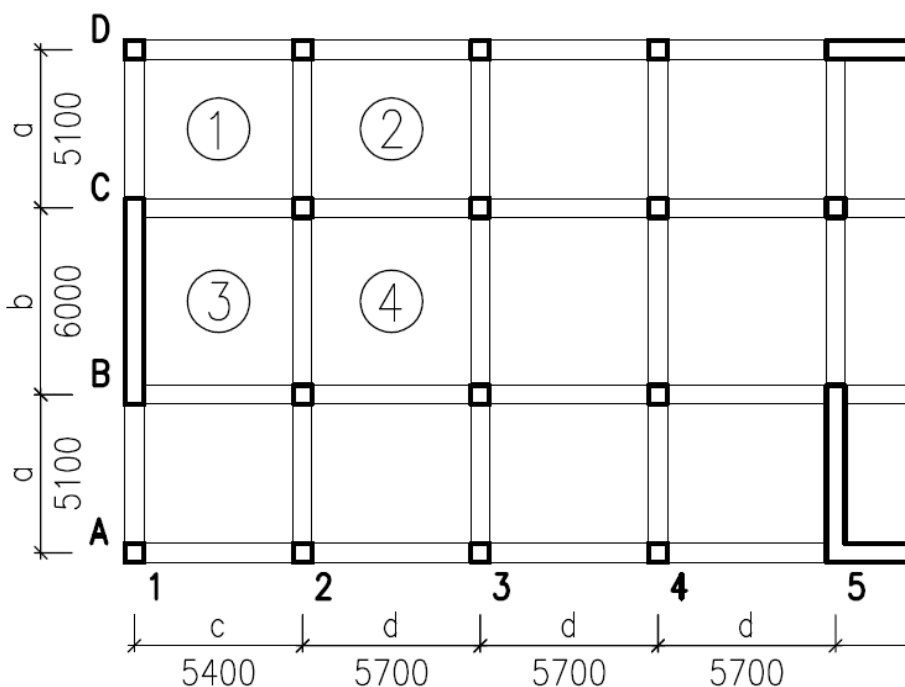
řešitelský kolektiv : Ing. Ondřej Vrátný
Ing. Martin Tipka
doc. Ing. Jitka Vašková, CSc.

Studie se zabývá porovnáním metod návrhu železobetonových po obvodě nepoddajně podepřených desek z hlediska únosnosti v ohybu. Hlavní náplní práce (po navržení rozměrů základních nosných prvků) je výpočet rozdělení vnitřních sil (ohybových momentů) v konstrukci. K porovnání byly zvoleny ruční výpočty elastické a plastické analýzy a obecná metoda založená na principu konečných prvků. Pozornost byla věnována nejen namáhání konstrukce uprostřed rozpětí, ale také napjatostním stavům v blízkosti podpor. Výsledky byly porovnány nejen z hlediska výstižnosti výpočtu, ale také z hlediska jeho efektivnosti, obtížnosti vyhodnocení výsledků a jejich dalšího využití.

Pro porovnání obou výše zmíněných metod výpočtu byla vybrána pravidelná konstrukce železobetonového patrového skeletu s obousměrnými rámy (viz **Schéma konstrukce**). Jedná se o trojtrakt ztužený středovým železobetonovým jádrem a příčnou štítovou železobetonovou stěnou. Konstrukce stropu byla postupně řešena zjednodušenou metodou pomocí tabulek za předpokladu pružného i plastického chování a numericky na patrovém výseku konstrukce užitím lineární analýzy MKP.

- půdorysné rozměry : $a = 5,1\text{ m}$
 $b = 6,0\text{ m}$
 $c = 5,4\text{ m}$
 $d = 5,7\text{ m}$
- ost. stálé zatížení patra : $(g - g_0)_{patro,k} = 1,255\text{ kN/m}^2$
- ost. stálé zatížení střechy : $(g - g_0)_{střecha,k} = 2,155\text{ kN/m}^2$
- proměnné zatížení patra : $q_{patro,k} = 5,0\text{ kN/m}^2$
- proměnné zatížení střechy : $q_{střecha,k} = 0,75\text{ kN/m}^2$
- počet podlaží : $n = 4$
- konstr. výška objektu : $h = 3,0\text{ m}$
- BETON : C 25/30 XC2 (CZ) - C1 0,1 - Dmax 16 - S3 $f_{cd} = 16,667\text{ MPa}$
- OCEL : B 500 B $f_{yd} = 434,783\text{ MPa}$
- krycí vrstva : $c_d = 30\text{ mm}$

Schéma konstrukce :



- $l_{x,1} = l_{x,3} = c = 5,4\text{ m}$
- $l_{x,2} = l_{x,4} = d = 5,7\text{ m}$
- $l_{y,1} = l_{y,2} = a = 5,1\text{ m}$
- $l_{y,3} = l_{y,4} = b = 6,0\text{ m}$

Předběžný návrh nosných prvků :

1. stropní deska :

- empirický návrh tloušťky desky :

$$h_d \geq \frac{1}{75} \cdot (l_x + l_y) + \Delta = \frac{1}{75} \cdot (5700 + 6000) + \Delta = 156 \text{ mm} + \Delta \quad \dots \text{ po obvodě podepřená deska}$$

- návrh na základě splnění podmínky ohybové štíhlosti desky

$$\lambda = \frac{l_d}{d} \leq \lambda_d = \kappa_{c1} \cdot \kappa_{c2} \cdot \kappa_{c3} \cdot \lambda_{d,tab}$$

$$\kappa_{c1} = 1 \quad \dots \text{ obdélníkový průřez}$$

$$\kappa_{c2} = 1 \quad \dots \text{ rozpětí desky } L < 7,0 \text{ m} \quad \dots \text{ splněno pro všechna pole stropní desky}$$

$$\kappa_{c3} = 1,3 \quad \dots \text{ odhad součinitele napětí tahové výztuže } \kappa_{c3} = \frac{500}{f_{yk}} \cdot \frac{A_{s,prov}}{A_{s,req}}$$

$$\lambda_{d,tab,K} = 24,1 \quad \dots \text{ krajní pole desky pnuté v obou směrech, } \rho \leq 0,5\%, \text{ C25/30}$$

$$\lambda_{d,tab,V} = 27,8 \quad \dots \text{ vnitřní pole desky pnuté v obou směrech, } \rho \leq 0,5\%, \text{ C25/30}$$

$$\lambda_{d,K} = \kappa_{c1} \cdot \kappa_{c2} \cdot \kappa_{c3} \cdot \lambda_{d,tab,K} = 1 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 24,1 = 31,33$$

$$\lambda_{d,V} = \kappa_{c1} \cdot \kappa_{c2} \cdot \kappa_{c3} \cdot \lambda_{d,tab,2} = 1 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 27,8 = 36,14$$

- po obvodě podepřená deska \Rightarrow dominantní přenos zatížení ve směru **kratšího rozpětí** desky

- deska č. 1 : kratší rozpětí $l_{y,1} = 5,1 \text{ m}$ \Rightarrow krajní pole : $\lambda_{d,K} = 31,33$

$$d_1 \geq \frac{l_{y,1}}{\lambda_{d,K}} = \frac{5100}{31,33} = 162,8 \text{ mm}$$

- deska č. 2 : kratší rozpětí $l_{y,2} = 5,1 \text{ m}$ \Rightarrow krajní pole : $\lambda_{d,K} = 31,33$

$$d_2 \geq \frac{l_{y,2}}{\lambda_{d,K}} = \frac{5100}{31,33} = 162,8 \text{ mm}$$

- deska č. 3 : kratší rozpětí $l_{x,3} = 5,4 \text{ m}$ \Rightarrow vnitřní pole (ŽB stěna) : $\lambda_{d,V} = 36,14$

$$d_3 \geq \frac{l_{x,3}}{\lambda_{d,V}} = \frac{5400}{36,14} = 149,4 \text{ mm}$$

- deska č. 4 : kratší rozpětí $l_{x,4} = 5,7 \text{ m}$ \Rightarrow vnitřní pole : $\lambda_{d,V} = 36,14$

$$d_4 \geq \frac{l_{x,4}}{\lambda_{d,V}} = \frac{5700}{36,14} = 157,7 \text{ mm}$$

- tloušťka desky : $h_d = d + 1,5 \cdot \varnothing_{s,d} + c = 162,8 + 1,5 \cdot 8 + 30 = 204,8 \text{ mm}$

\Rightarrow návrh : **$h_d = 190 \text{ mm}$**

POZN : Je možné navrhnout tloušťku desky i menší (např. $h_d = 180 \text{ mm}$), která povede k úspornějšímu návrhu s větší mírou využití ohybové výztuže. V takovém případě však deska již výrazně nesplňuje podmínku limitní ohybové štíhlosti a je nutné posoudit MSP, konkrétně mezní stav deformace. Při větších hodnotách užitého zatížení pak mohou nastat problémy s dodržáním limitního průhybu.

2. stropní průvlak :

- empirický návrh výšky průvlaku :

$$h_{p,x} = \left(\frac{1}{12} \div \frac{1}{10}\right) \cdot l_x = \left(\frac{1}{12} \div \frac{1}{10}\right) \cdot 5700 = 475 \div 570 \text{ mm}$$

$$h_{p,y} = \left(\frac{1}{12} \div \frac{1}{10}\right) \cdot l_y = \left(\frac{1}{12} \div \frac{1}{10}\right) \cdot 6000 = 500 \div 600 \text{ mm}$$

$$h_p \geq 2,5 \cdot h_d = 2,5 \cdot 190 = 475 \text{ mm}$$

$$b_p = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right) \cdot h_p = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right) \cdot 600 = 200 \div 300 \text{ mm}$$

⇒ návrh průvlaků : **h_{p,x} = 500 mm** **b_p = 300 mm**
h_{p,y} = 600 mm

POZN : V různých zdrojích jsou dostupné různé vzorce pro empirický návrh rozměrů nosných prvků. Rozhodující pro spolehlivost konstrukce je však vždy až její posouzení.

3. sloup :

- počet podlaží : $n = 4$ (3x stropní konstrukce + 1x střešní konstrukce)
- konstrukční výška podlaží : $h = 3,0 \text{ m}$
- zatěžovací plocha sloupu : $b_{zat} = l_{x,4} = 5,7 \text{ m}$

$$l_{zat} = \frac{l_{y,2} + l_{y,4}}{2} = \frac{5,1 + 6,0}{2} = 5,55 \text{ m}$$

$$A_{zat} = b_{zat} \cdot l_{zat} = 5,7 \cdot 5,55 = 31,635 \text{ m}^2$$

- předpokládané rozměry sloupu : **300 mm x 300 mm**

| | počet | výpočet | charakteristické [kN] | γ_F | návrhové [kN] |
|-----------------------|-------|--|-----------------------|------------|-----------------|
| vl. tíha strop. desek | 4 | $4 \cdot 0,19 \cdot 31,635 \cdot 25$ | 601,065 | 1,35 | 811,438 |
| vl. tíha průvlaků | 4 | $4 \cdot 0,3 \cdot (0,41 \cdot 5,55 + 0,31 \cdot 5,25) \cdot 25$ | 117,090 | 1,35 | 158,072 |
| vlastní tíha sloupu | 9,6 m | $0,3 \cdot 0,3 \cdot 9,6 \cdot 25$ | 21,600 | 1,35 | 29,160 |
| ostatní stálé patra | 3 | $3 \cdot 31,635 \cdot 1,255$ | 119,106 | 1,35 | 160,793 |
| ostatní stálé střechy | 1 | $1 \cdot 31,635 \cdot 2,155$ | 68,173 | 1,35 | 92,034 |
| Σ stálé | | | 927,034 | | 1251,497 |
| proměnné patra | 3 | $3 \cdot 31,635 \cdot 5,0$ | 474,525 | 1,5 | 711,788 |
| proměnné střechy | 1 | $1 \cdot 31,635 \cdot 0,75$ | 23,726 | 1,5 | 35,589 |
| Σ | | | 1425,285 | | 1998,874 |

- návrhové normálové zatížení v patě sloupu : $N_{Ed,max} = 1998,874 \text{ kN}$

posudek :

- únosnost v patě sloupu :

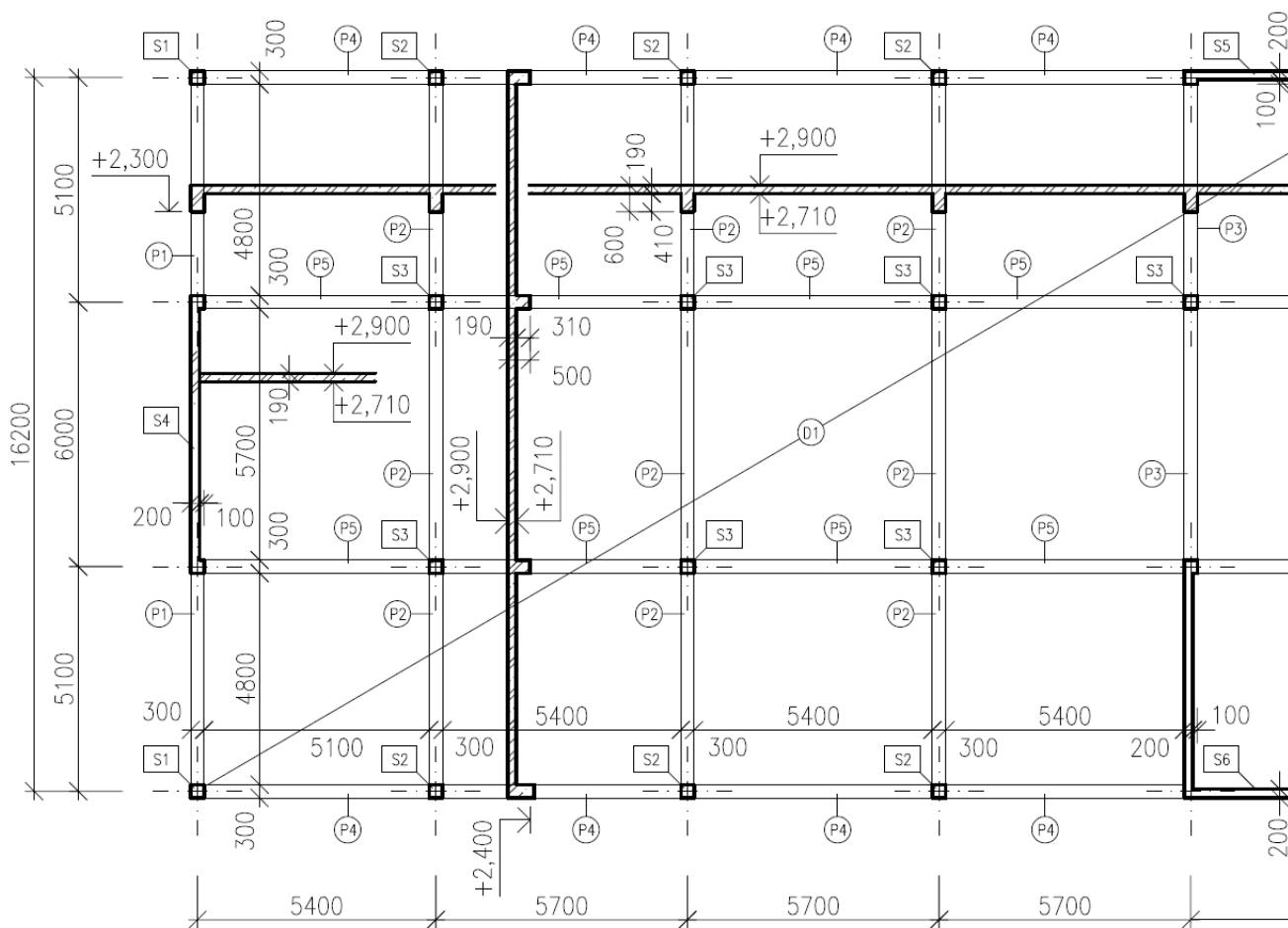
$$N_{Rd} = 0,8 \cdot A_c \cdot f_{cd} + A_s \cdot \sigma_s = 0,8 \cdot A_c \cdot f_{cd} + A_c \cdot \rho \cdot \sigma_s =$$
$$= 0,8 \cdot 300 \cdot 300 \cdot 16,666 + 300 \cdot 300 \cdot 0,025 \cdot 400 = 2099952 \text{ N} = 2099,952 \text{ kN}$$

- posouzení :

$$N_{Rd} = 2099,952 \text{ kN} \geq N_{Ed,max} = 1998,874 \text{ kN} \quad \dots \quad \text{návrh sloupu vyhovuje}$$

⇒ návrh rozměrů sloupu : **300 mm x 300 mm**

Schematický výkres tvaru :



Výpočet zatížení stropní desky :

1. stropní deska :

stálé zatížení :

| skladba konstrukce | d [m] | ρ_v | char. zatížení g_k | γ_G | návrh. zatížení g_d |
|------------------------|---------|----------|---------------------------|------------|---------------------------|
| železobeton | 0,190 x | 2500 | = 4,750 kN/m ² | x 1,35 | = 6,413 kN/m ² |
| ostatní stálé zatížení | | | 1,255 kN/m ² | x 1,35 | = 1,694 kN/m ² |

celkem $g_k = 6,005 \text{ kN/m}^2$ $g_d = \mathbf{8,107 \text{ kN/m}^2}$

proměnné zatížení :

užitné zatížení $q_k = 5,000 \text{ kN/m}^2$ x 1,5 $q_d = 7,500 \text{ kN/m}^2$

Celkem $(g+q)_k = 11,005 \text{ kN/m}^2$ $(g+q)_d = \mathbf{15,607 \text{ kN/m}^2}$

2. střešní deska :

stálé zatížení :

| skladba konstrukce | d [m] | ρ_v | char. zatížení g_k | γ_G | návrh. zatížení g_d |
|------------------------|---------|----------|---------------------------|------------|---------------------------|
| železobeton | 0,190 x | 2500 | = 4,750 kN/m ² | x 1,35 | = 6,413 kN/m ² |
| ostatní stálé zatížení | | | 2,155 kN/m ² | x 1,35 | = 2,909 kN/m ² |

celkem $g_k = 6,905 \text{ kN/m}^2$ $g_d = \mathbf{9,322 \text{ kN/m}^2}$

proměnné zatížení :

užitné zatížení $q_k = 0,750 \text{ kN/m}^2$ x 1,5 $q_d = 1,125 \text{ kN/m}^2$

Celkem $(g+q)_k = 7,655 \text{ kN/m}^2$ $(g+q)_d = \mathbf{10,447 \text{ kN/m}^2}$

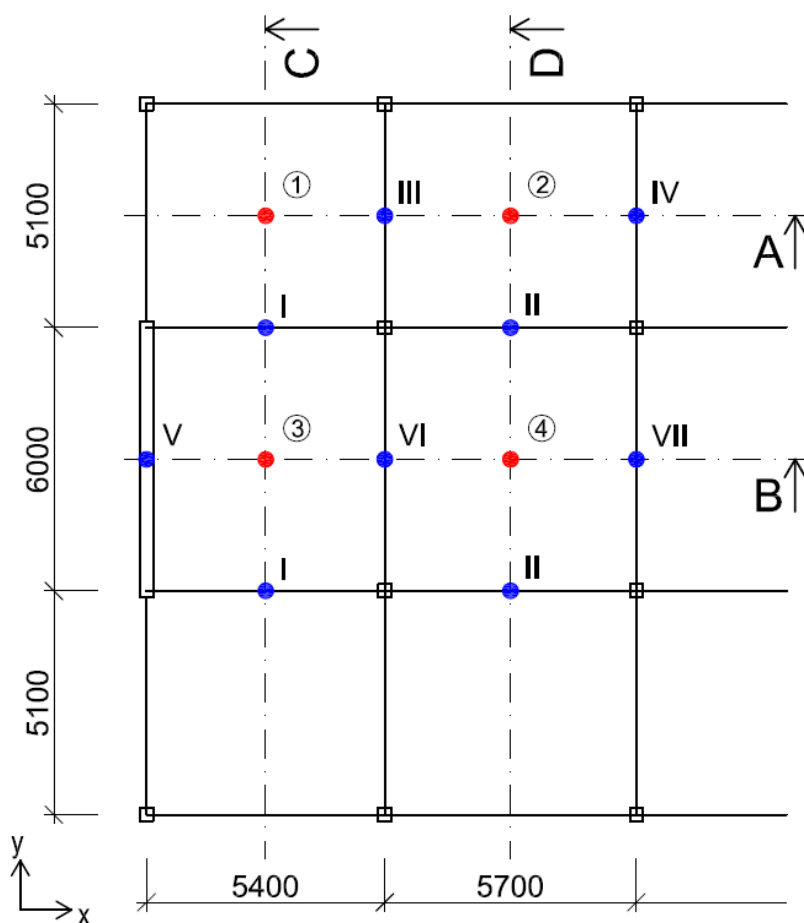
návrhové zatížení :

➤ Stropní deska zatížena více než střešní deska \Rightarrow **návrh proveden pro stropní desku**

- stálé zatížení : $g_d = 8,107 \text{ kN/m}^2$
- užitné zatížení : $q_d = 7,5 \text{ kN/m}^2$
- kombinace zatížení : 1) $\left(g + \frac{q}{2}\right)_d = 8,107 + \frac{7,5}{2} = 11,857 \text{ kN/m}^2$
2) $\left(\frac{q}{2}\right)_d = \frac{7,5}{2} = 3,75 \text{ kN/m}^2$
3) $(g + q)_d = 8,107 + 7,5 = 15,607 \text{ kN/m}^2$

I. Výpočet momentů dle teorie pružnosti (tabulkový výpočet) :

⇒ výpočet pomocí tabulek (desky po obvodě uložené, rovnoměrně zatížené)



poměr rozpětí : $\alpha = \frac{l_b}{l_a}$

mezipodporové momenty :

$$m_a = \frac{1}{a_i} \cdot \left(g + \frac{q}{2} \right)_d \cdot l_a^2 + \frac{1}{a_j} \cdot \left(\frac{q}{2} \right)_d \cdot l_a^2$$

$$m_b = \frac{1}{b_i} \cdot \left(g + \frac{q}{2} \right)_d \cdot l_b^2 + \frac{1}{b_j} \cdot \left(\frac{q}{2} \right)_d \cdot l_b^2$$

rozdělení zatížení do směrů :

$$f_a = c_i \cdot (g + q)_d$$

$$f_b = (1 - c_i) \cdot (g + q)_d$$

podporové momenty :

$$m_x = \frac{1}{n} \cdot \frac{f_{x,i} + f_{x,j}}{2} \cdot \left(\frac{l_{x,i} + l_{x,j}}{2} \right)^2$$

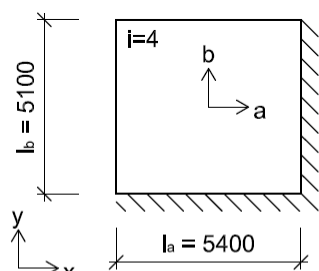
$$m_y = \frac{1}{n} \cdot \frac{f_{y,i} + f_{y,j}}{2} \cdot \left(\frac{l_{y,i} + l_{y,j}}{2} \right)^2$$

i vyšetřovaná deska

j deska zbavená spjitosti

Mezipodporové momenty a rozdělení zatížení : (s uvažováním vlivu střídavého užitého zatížení)

deska č. 1 : deska typu 4 : $i = 4, j = 1$



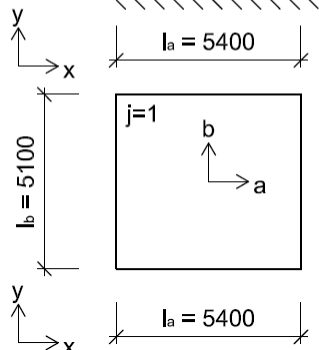
$$l_a = 5,4 \text{ m} \quad \alpha = \frac{5,1}{5,4} = 0,944$$

$$a_4 = 42,140 \quad a_1 = 31,152$$

$$l_b = 5,1 \text{ m}$$

$$b_4 = 33,404 \quad b_1 = 24,544$$

$$c_4 = 0,441$$



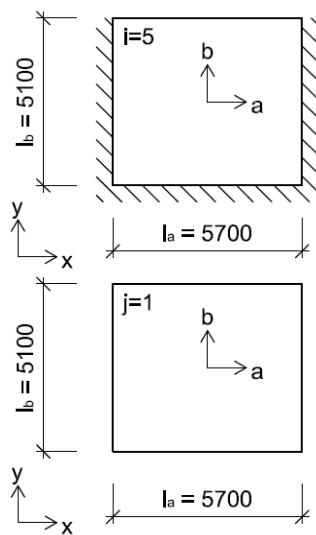
$$m_{x,1} = m_{a,1} = \frac{1}{42,140} \cdot 11,857 \cdot 5,4^2 + \frac{1}{31,152} \cdot 3,75 \cdot 5,4^2 = 11,715 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,1} = m_{b,1} = \frac{1}{33,404} \cdot 11,857 \cdot 5,1^2 + \frac{1}{24,544} \cdot 3,75 \cdot 5,1^2 = 13,206 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$f_{x,1} = f_{a,1} = 0,441 \cdot 15,607 = 6,883 \text{ kN} / \text{m}'$$

$$f_{y,1} = f_{b,1} = (1 - 0,441) \cdot 15,607 = 8,724 \text{ kN} / \text{m}'$$

deska č. 2 : deska typu 5 : $i = 5, j = 1$



$$l_a = 5,7 \text{ m} \quad \alpha = \frac{5,1}{5,7} = 0,895 \quad a_5 = 53,185 \quad a_1 = 34,510$$

$$l_b = 5,1 \text{ m} \quad b_5 = 38,885 \quad b_1 = 22,080$$

$$c_5 = 0,561$$

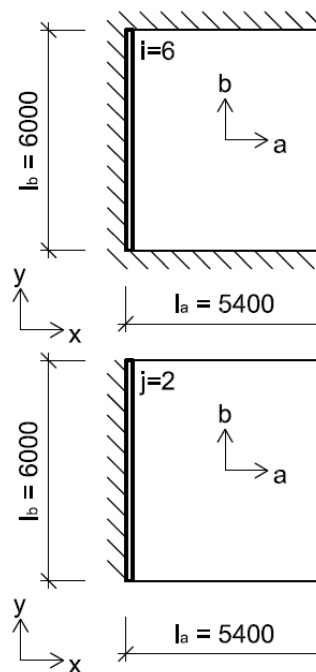
$$m_{x,2} = m_{a,2} = \frac{1}{53,185} \cdot 11,857 \cdot 5,7^2 + \frac{1}{34,510} \cdot 3,75 \cdot 5,7^2 = 10,774 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,2} = m_{b,2} = \frac{1}{38,885} \cdot 11,857 \cdot 5,1^2 + \frac{1}{22,080} \cdot 3,75 \cdot 5,1^2 = 14,324 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$f_{x,2} = f_{a,2} = 0,561 \cdot 15,607 = 8,756 \text{ kN} / \text{m}'$$

$$f_{y,2} = f_{b,2} = (1 - 0,561) \cdot 15,607 = 6,851 \text{ kN} / \text{m}'$$

deska č. 3 : deska typu 6 : $i = 6, j = 2$



$$l_a = 5,4 \text{ m} \quad \alpha = \frac{6,0}{5,4} = 1,111 \quad a_6 = 46,151 \quad a_2 = 25,703$$

$$l_b = 6,0 \text{ m} \quad b_6 = 70,293 \quad b_2 = 49,118$$

$$c_6 = 0,603$$

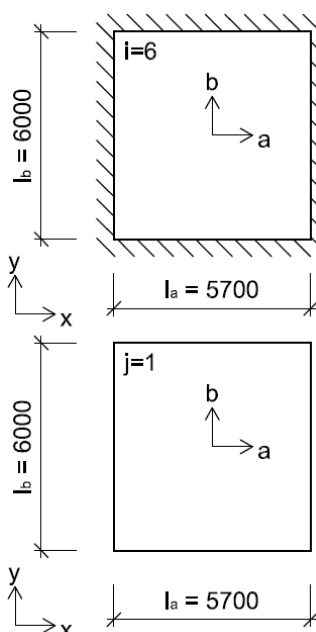
$$m_{x,3} = m_{a,3} = \frac{1}{46,151} \cdot 11,857 \cdot 5,4^2 + \frac{1}{25,703} \cdot 3,75 \cdot 5,4^2 = 11,746 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,3} = m_{b,3} = \frac{1}{70,293} \cdot 11,857 \cdot 6,0^2 + \frac{1}{49,118} \cdot 3,75 \cdot 6,0^2 = 8,821 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$f_{x,3} = f_{a,3} = 0,603 \cdot 15,607 = 9,411 \text{ kN} / \text{m}'$$

$$f_{y,3} = f_{b,3} = (1 - 0,603) \cdot 15,607 = 6,196 \text{ kN} / \text{m}'$$

deska č. 4 : deska typu 6 : $i = 6, j = 1$



$$l_a = 5,7 \text{ m} \quad \alpha = \frac{6,0}{5,7} = 1,053 \quad a_6 = 50,983 \quad a_1 = 24,962$$

$$l_b = 6,0 \text{ m} \quad b_6 = 62,484 \quad b_1 = 30,580$$

$$c_6 = 0,550$$

$$m_{x,4} = m_{a,4} = \frac{1}{50,983} \cdot 11,857 \cdot 5,7^2 + \frac{1}{24,962} \cdot 3,75 \cdot 5,7^2 = 12,437 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,4} = m_{b,4} = \frac{1}{62,484} \cdot 11,857 \cdot 6,0^2 + \frac{1}{30,580} \cdot 3,75 \cdot 6,0^2 = 11,246 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

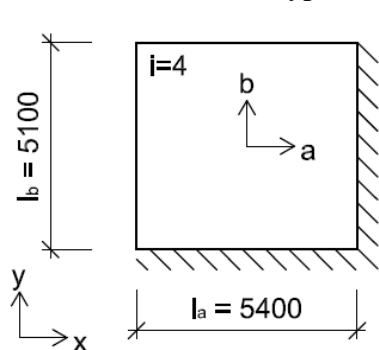
$$f_{x,4} = f_{a,4} = 0,550 \cdot 15,607 = 8,584 \text{ kN} / \text{m}'$$

$$f_{y,4} = f_{b,4} = (1 - 0,550) \cdot 15,607 = 7,023 \text{ kN} / \text{m}'$$

Alternativní výpočet mezipodporových momentů : (bez vlivu střídavého užitečného zatížení)

- Výpočet je vhodný spíše pro konstrukce s menším užitečným zatížením. S rostoucím vlivem užitečného zatížení klesá výstižnost výpočtu a dochází k podceňování hodnot mezipodporových momentů.

deska č. 1 : deska typu 4 : $i = 4$



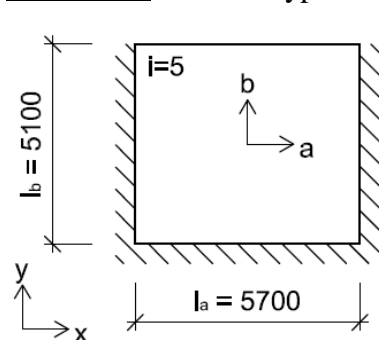
$$l_a = 5,4 \text{ m} \quad \alpha = \frac{5,1}{5,4} = 0,944 \quad a_4 = 42,140$$

$$l_b = 5,1 \text{ m} \quad b_4 = 33,404$$

$$m_{x,1} = m_{a,1} = \frac{1}{a_4} \cdot (g + q)_d \cdot l_a^2 = \frac{1}{42,140} \cdot 15,607 \cdot 5,4^2 = 10,800 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,1} = m_{b,1} = \frac{1}{b_4} \cdot (g + q)_d \cdot l_b^2 = \frac{1}{33,404} \cdot 15,607 \cdot 5,1^2 = 12,152 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 2 : deska typu 5 : $i = 5$



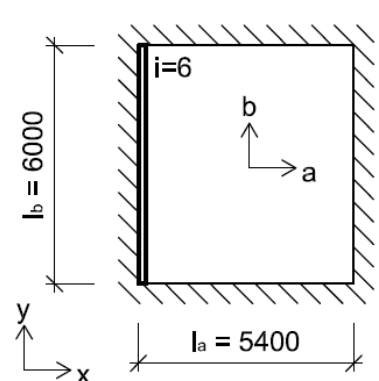
$$l_a = 5,7 \text{ m} \quad \alpha = \frac{5,1}{5,7} = 0,895 \quad a_5 = 53,185$$

$$l_b = 5,1 \text{ m} \quad b_5 = 38,885$$

$$m_{x,2} = m_{a,2} = \frac{1}{a_5} \cdot (g + q)_d \cdot l_a^2 = \frac{1}{53,185} \cdot 15,607 \cdot 5,7^2 = 9,534 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,2} = m_{b,2} = \frac{1}{b_5} \cdot (g + q)_d \cdot l_b^2 = \frac{1}{38,885} \cdot 15,607 \cdot 5,1^2 = 10,439 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 3 : deska typu 6 : $i = 6$



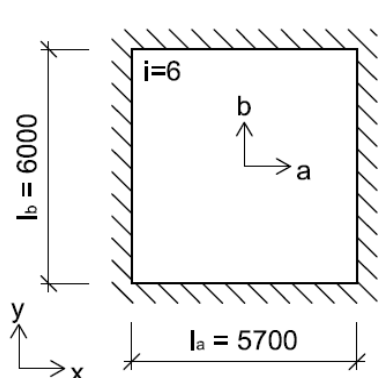
$$l_a = 5,4 \text{ m} \quad \alpha = \frac{6,0}{5,4} = 1,111 \quad a_6 = 46,151$$

$$l_b = 6,0 \text{ m} \quad b_6 = 70,293$$

$$m_{x,3} = m_{a,3} = \frac{1}{a_6} \cdot (g + q)_d \cdot l_a^2 = \frac{1}{46,151} \cdot 15,607 \cdot 5,4^2 = 9,861 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,3} = m_{b,3} = \frac{1}{b_6} \cdot (g + q)_d \cdot l_b^2 = \frac{1}{70,293} \cdot 15,607 \cdot 6,0^2 = 7,993 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 4 : deska typu 6 : $i = 6$



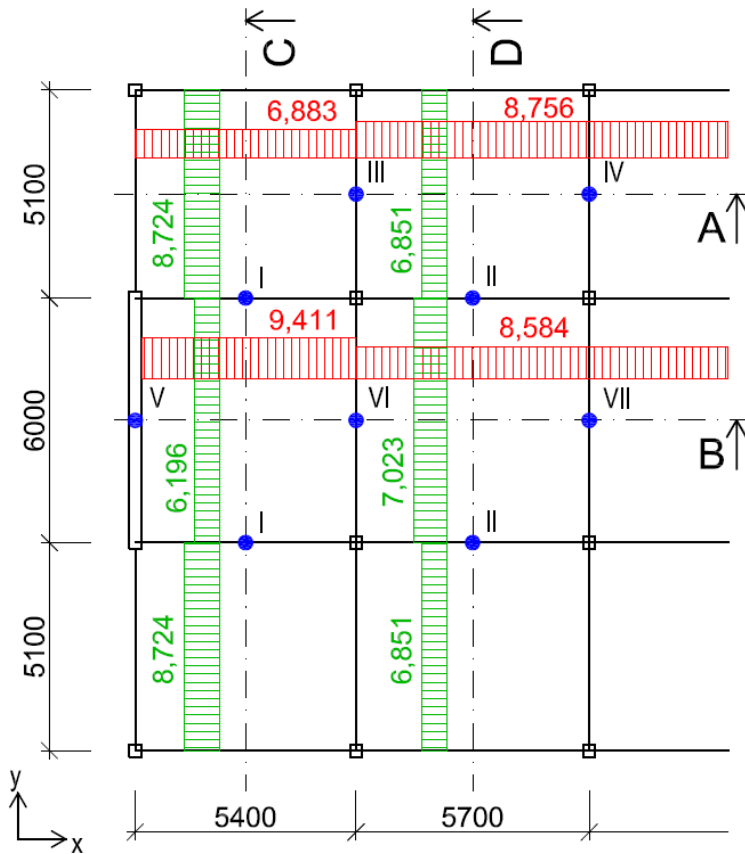
$$l_a = 5,7 \text{ m} \quad \alpha = \frac{6,0}{5,7} = 1,053 \quad a_6 = 50,983$$

$$l_b = 6,0 \text{ m} \quad b_6 = 62,484$$

$$m_{x,4} = m_{a,4} = \frac{1}{a_6} \cdot (g + q)_d \cdot l_a^2 = \frac{1}{50,983} \cdot 15,607 \cdot 5,7^2 = 9,946 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,4} = m_{b,4} = \frac{1}{b_6} \cdot (g + q)_d \cdot l_b^2 = \frac{1}{62,484} \cdot 15,607 \cdot 6,0^2 = 8,992 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

Podporové momenty :



$$m_I = -\frac{1}{10} \cdot \frac{f_{y,1} + f_{y,3}}{2} \cdot \left(\frac{l_{y,1} + l_{y,3}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{10} \cdot \frac{8,724 + 6,196}{2} \cdot \left(\frac{5,1 + 6,0}{2} \right)^2 = -22,979 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{II} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{f_{y,2} + f_{y,4}}{2} \cdot \left(\frac{l_{y,2} + l_{y,4}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{10} \cdot \frac{6,851 + 7,023}{2} \cdot \left(\frac{5,1 + 6,0}{2} \right)^2 = -21,368 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{III} = -\frac{1}{10} \cdot \frac{f_{x,1} + f_{x,2}}{2} \cdot \left(\frac{l_{x,1} + l_{x,2}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{10} \cdot \frac{6,883 + 8,756}{2} \cdot \left(\frac{5,4 + 5,7}{2} \right)^2 = -24,086 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{IV} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{f_{x,2} + f_{x,2}}{2} \cdot \left(\frac{l_{x,2} + l_{x,2}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{12} \cdot 8,756 \cdot 5,7^2 = -23,707 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_V = -\frac{1}{12} \cdot f_{x,3} \cdot l_{x,3}^2 = -\frac{1}{12} \cdot 9,411 \cdot 5,4^2 = -22,869 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{VI} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{f_{x,3} + f_{x,4}}{2} \cdot \left(\frac{l_{x,3} + l_{x,4}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{12} \cdot \frac{9,411 + 8,584}{2} \cdot \left(\frac{5,4 + 5,7}{2} \right)^2 = -23,095 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{VII} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{f_{x,4} + f_{x,4}}{2} \cdot \left(\frac{l_{x,4} + l_{x,4}}{2} \right)^2 = -\frac{1}{12} \cdot 8,584 \cdot 5,7^2 = -23,241 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

II. Výpočet momentů dle teorie plasticity (tabulkový výpočet) :

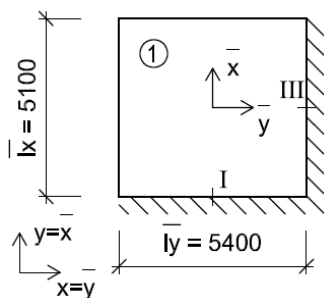
⇒ výpočet pomocí tabulek (desky po obvodě uložené, rovnoměrně zatížené, při zabránění nadzvedávání rohů)

- pro výpočet je nutná záměna označení rozměrů desek l_x a l_y za rozměry \bar{l}_x a \bar{l}_y , tak, aby platila konvence $\bar{l}_x \leq \bar{l}_y$ (\bar{l}_x je vždy menší z rozměrů desky, \bar{l}_y je vždy větší z rozměrů desky)
- hodnoty momentů pro jednotlivé desky (pole spojitě desky) :

$$m_0 = (g + q)_d \cdot \bar{l}_x^2 = 15,607 \cdot \bar{l}_x^2 \quad m_{xe} = \beta_{xe} \cdot m_0 \quad m_{xm} = \beta_{xm} \cdot m_0$$

$$m_{ye} = \beta_{ye} \cdot m_0 \quad m_{ym} = \beta_{ym} \cdot m_0$$

deska č. 1 : typ podepření č. 4



$$\bar{l}_x = 5,1 \text{ m} \quad \beta_{xe} = -0,052 \quad \beta_{xm} = 0,040$$

$$\bar{l}_y = 5,4 \text{ m} \quad \beta_{ye} = -0,045 \quad \beta_{ym} = 0,034$$

$$\frac{\bar{l}_y}{\bar{l}_x} = \frac{5,4}{5,1} = 1,059 \quad m_0 = (g + q)_d \cdot \bar{l}_x^2 = 15,607 \cdot 5,1^2 = 405,938 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

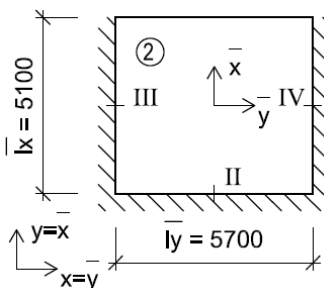
$$m_{x,1} = m_{\bar{y}m,1} = \beta_{ym} \cdot m_0 = 0,034 \cdot 405,938 = 13,802 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,1} = m_{\bar{x}m,1} = \beta_{xm} \cdot m_0 = 0,040 \cdot 405,938 = 16,238 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{I,1} = m_{\bar{x}e,1} = \beta_{xe} \cdot m_0 = -0,052 \cdot 405,938 = -21,109 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{III,1} = m_{\bar{y}e,1} = \beta_{ye} \cdot m_0 = -0,045 \cdot 405,938 = -18,267 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 2 : typ podepření č. 3



$$\bar{l}_x = 5,1 \text{ m} \quad \beta_{xe} = -0,050 \quad \beta_{xm} = 0,037$$

$$\bar{l}_y = 5,7 \text{ m} \quad \beta_{ye} = -0,037 \quad \beta_{ym} = 0,028$$

$$\frac{\bar{l}_y}{\bar{l}_x} = \frac{5,7}{5,1} = 1,118 \quad m_0 = (g + q)_d \cdot \bar{l}_x^2 = 15,607 \cdot 5,1^2 = 405,938 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

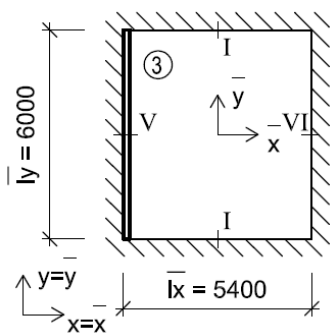
$$m_{x,2} = m_{\bar{y}m,2} = \beta_{ym} \cdot m_0 = 0,028 \cdot 405,938 = 11,366 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,2} = m_{\bar{x}m,2} = \beta_{xm} \cdot m_0 = 0,037 \cdot 405,938 = 15,020 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{III,2} = m_{IV,2} = m_{\bar{y}e,2} = \beta_{ye} \cdot m_0 = -0,037 \cdot 405,938 = -15,020 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{II,2} = m_{\bar{x}e,2} = \beta_{xe} \cdot m_0 = -0,050 \cdot 405,938 = -20,297 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 3 : typ podepření č. 1



$$\begin{aligned} \bar{l}_x &= 5,4 \text{ m} & \beta_{xe} &= -0,038 & \beta_{xm} &= 0,028 \\ \bar{l}_y &= 6,0 \text{ m} & \beta_{ye} &= -0,032 & \beta_{ym} &= 0,024 \\ \frac{\bar{l}_y}{\bar{l}_x} &= \frac{6,0}{5,4} = 1,111 & m_0 &= (g + q)_d \cdot \bar{l}_x^2 = 15,607 \cdot 5,4^2 = 455,100 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}' \end{aligned}$$

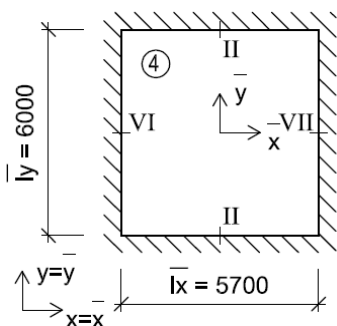
$$m_{x,3} = m_{\bar{x}m,3} = \beta_{xm} \cdot m_0 = 0,028 \cdot 455,100 = 12,743 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{y,3} = m_{\bar{y}m,3} = \beta_{ym} \cdot m_0 = 0,024 \cdot 455,100 = 10,922 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{V,3} = m_{VI,3} = m_{\bar{x}e,3} = \beta_{xe} \cdot m_0 = -0,038 \cdot 455,100 = -17,294 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{I,3} = m_{\bar{y}e,3} = \beta_{ye} \cdot m_0 = -0,032 \cdot 455,100 = -14,563 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

deska č. 4 : typ podepření č. 1



$$\begin{aligned} \bar{l}_x &= 5,7 \text{ m} & \beta_{xe} &= -0,034 & \beta_{xm} &= 0,026 \\ \bar{l}_y &= 6,0 \text{ m} & \beta_{ye} &= -0,032 & \beta_{ym} &= 0,024 \\ \frac{\bar{l}_y}{\bar{l}_x} &= \frac{6,0}{5,7} = 1,053 & m_0 &= (g + q)_d \cdot \bar{l}_x^2 = 15,607 \cdot 5,7^2 = 507,071 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}' \end{aligned}$$

$$m_{x,4} = m_{\bar{x}m,4} = \beta_{xm} \cdot m_0 = 0,026 \cdot 507,071 = 13,184 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

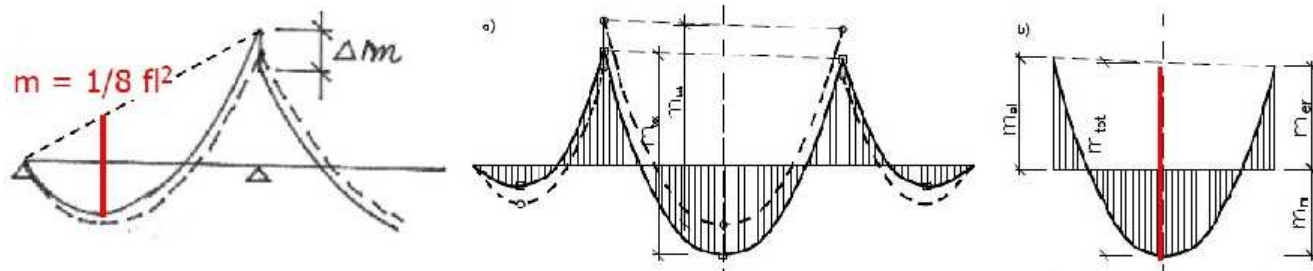
$$m_{y,4} = m_{\bar{y}m,4} = \beta_{ym} \cdot m_0 = 0,024 \cdot 507,071 = 12,170 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{VI,4} = m_{VII,4} = m_{\bar{x}e,4} = \beta_{xe} \cdot m_0 = -0,034 \cdot 507,071 = -17,240 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

$$m_{II,4} = m_{\bar{y}e,4} = \beta_{ye} \cdot m_0 = -0,032 \cdot 507,071 = -16,226 \text{ kN} \cdot \text{m} / \text{m}'$$

vyrovnání podporových momentů :

Jelikož plastický výpočet je prováděn na jednotlivých deskách samostatně, nezávisle na deskách okolních, získáváme při rozdílných rozpětích sousedních desek na jejich rozmezí 2 rozdílné hodnoty podporového momentu. Tyto hodnoty je nutné vyrovnat a následně odpovídajícím způsobem upravit hodnoty přilehlých momentů mezipodporových.

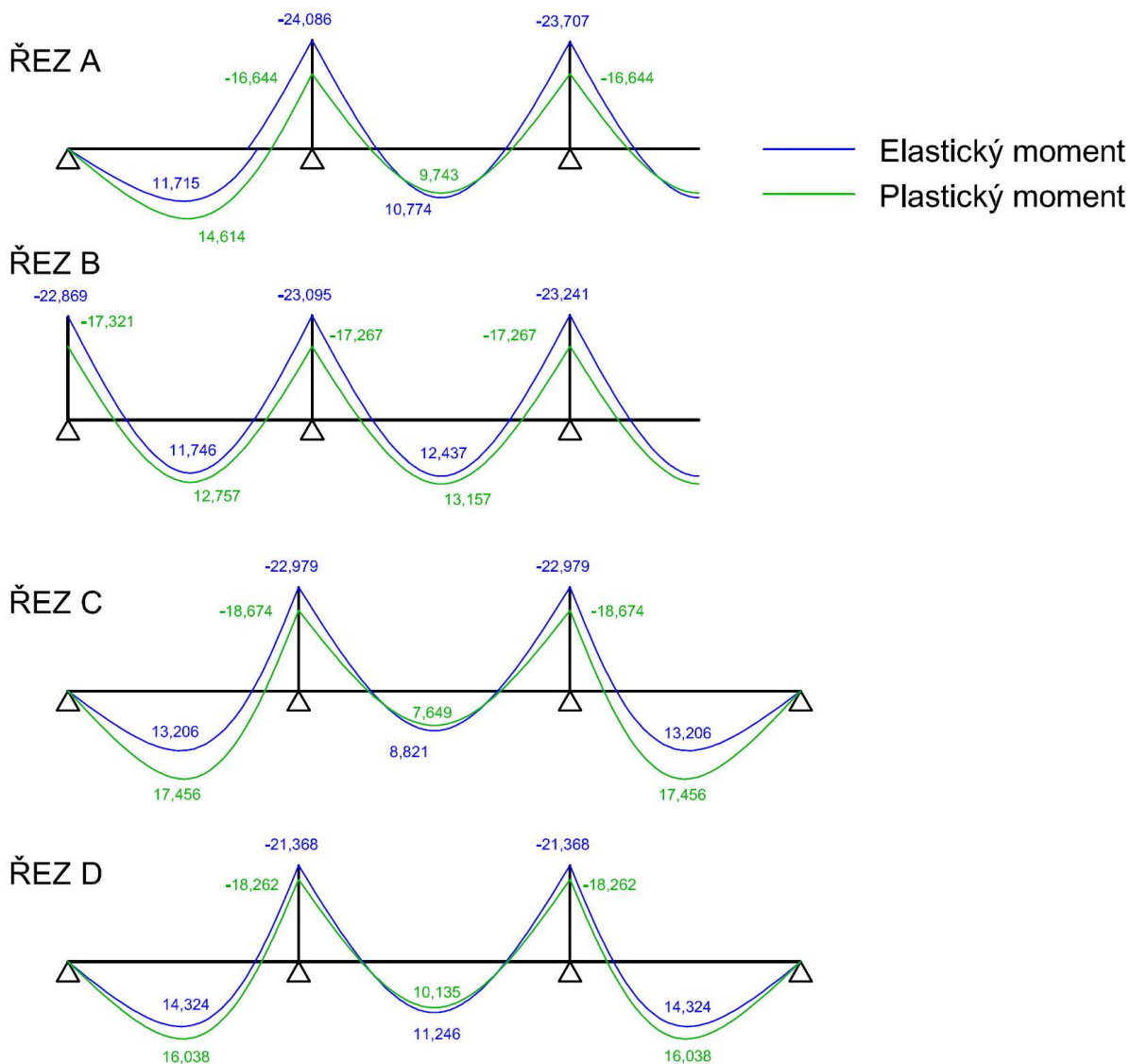


Prakticky to provedeme zjednodušeným způsobem tak, že 2 rozdílné hodnoty podporových momentů zprůměrujeme (upravíme o Δm) a následně uvedeným způsobem navýšíme, příp. snížíme přilehlý moment mezipodporový.

Souhrn momentů :

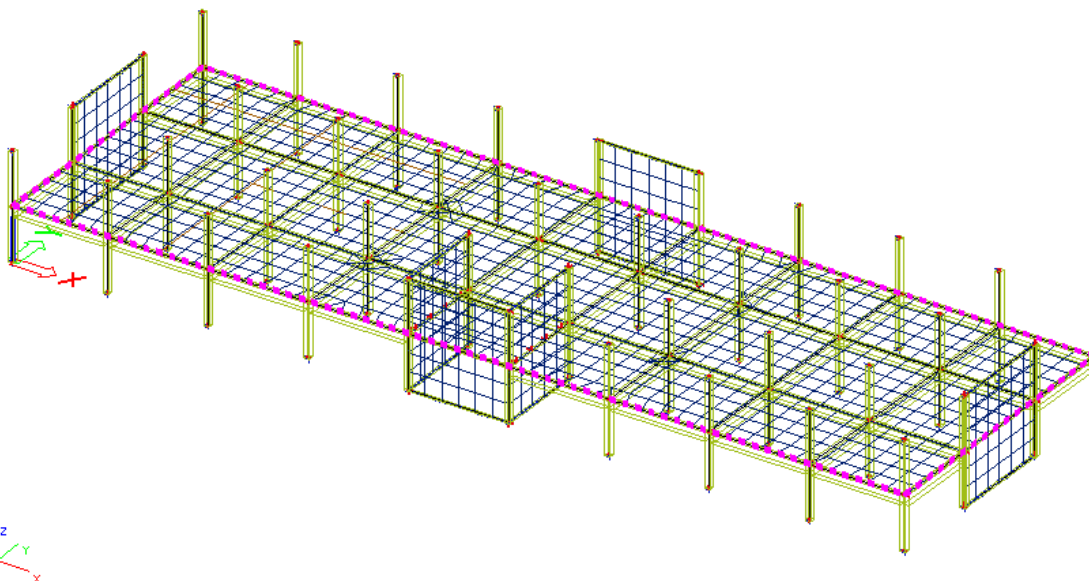
| Mezipodporové momenty [kN.m/m`] | | | | |
|---------------------------------|----------------|------------|-------------|---------------|
| | elastické | | plastické | |
| | střídavé užité | plně užité | nevyrovnané | vyrovnané |
| $m_{x,1}$ | 11,715 | 10,800 | 13,802 | 14,614 |
| $m_{y,1}$ | 13,206 | 12,152 | 16,238 | 17,456 |
| $m_{x,2}$ | 10,774 | 9,534 | 11,366 | 9,743 |
| $m_{y,2}$ | 14,324 | 10,439 | 15,020 | 16,038 |
| $m_{x,3}$ | 11,746 | 9,861 | 12,743 | 12,757 |
| $m_{y,3}$ | 8,821 | 7,993 | 10,922 | 7,649 |
| $m_{x,4}$ | 12,437 | 9,946 | 13,184 | 13,157 |
| $m_{y,4}$ | 11,246 | 8,992 | 12,170 | 10,135 |

| Podporové momenty [kN.m/m`] | | | | |
|-----------------------------|-----------|-------------|---|----------------|
| | elastické | plastické | | |
| | | nevyrovnané | | vyrovnané |
| m_I | -22,979 | -21,109 | 1 | -18,674 |
| | | -14,563 | 3 | |
| m_{II} | -21,368 | -20,297 | 2 | -18,262 |
| | | -16,226 | 4 | |
| m_{III} | -24,086 | -18,267 | 1 | -16,644 |
| | | -15,020 | 2 | |
| m_{IV} | -23,707 | -15,020 | | -16,644 |
| m_V | -22,869 | -17,294 | | -17,321 |
| m_{VI} | -23,095 | -17,294 | 3 | -17,267 |
| | | -17,240 | 4 | |
| m_{VII} | -23,241 | -17,240 | | -17,267 |



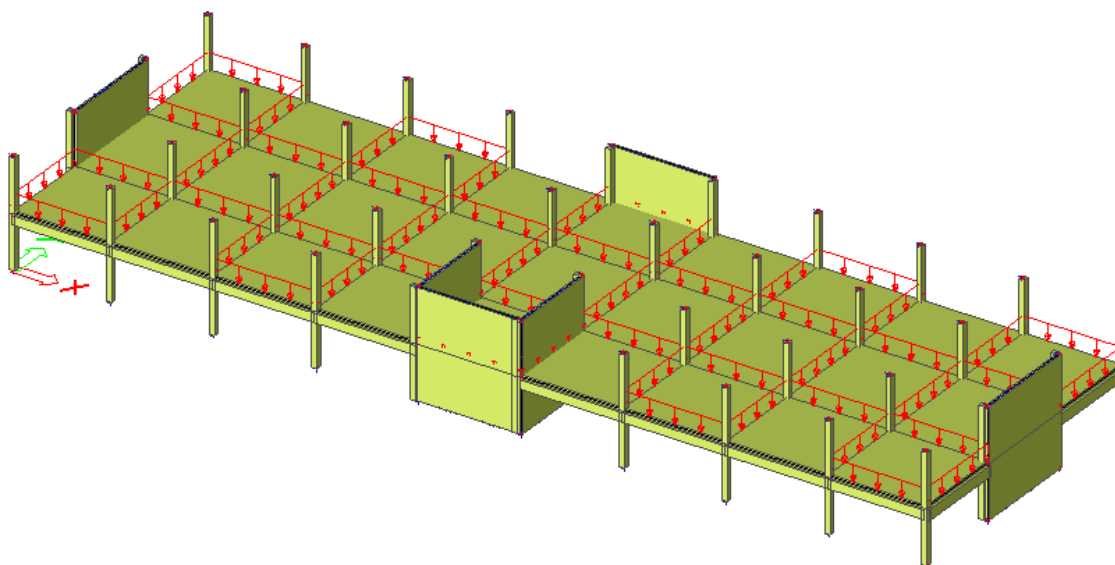
III. Numerické řešení metodou konečných prvků dle teorie pružnosti :

Alternativou k "ručnímu" řešení pomocí statických tabulek je numerické řešení. Většina v současnosti dostupných statické výpočetní programů pracuje na principu konečných prvků. Konstrukce namodelovaná v grafickém prostředí, doplněná o kinematické a statické okrajové podmínky, je rozdělena na konečný počet podoblastí jednoduchých tvarů, tzv. konečné prvky.



Pomocí bázevých funkcí a tuhosti konstrukce jsou postupně řešeny neznámé posuny uzlů sítě a z nich následně dopočítány hodnoty vnitřních sil. V praxi to představuje vytvoření grafického řešení, konkrétně u desek v podobě izoploch a izolinií. Předností této metody je fakt, že umožňuje řešit libovolně složitou konstrukci, jediným omezujícím faktorem je výkon výpočetní techniky. Nevýhodou mohou být značné nepřesnosti řešení v oblasti diskontinuit modelu a v některých případech obtížnější vyhodnocení výsledků.

Jako výpočetní model pro metodu konečných prvků byl zvolen patrový výsek konstrukce v rozsahu 2 podlaží, doplněný o kinematické okrajové podmínky v úrovni stropních desek nad a pod řešenou stropní hladinou. Tento model tak zohledňuje vliv tuhosti svislých nosných konstrukcí. Ve výpočtu byl automaticky simulován vliv střídavého užitného zatížení.

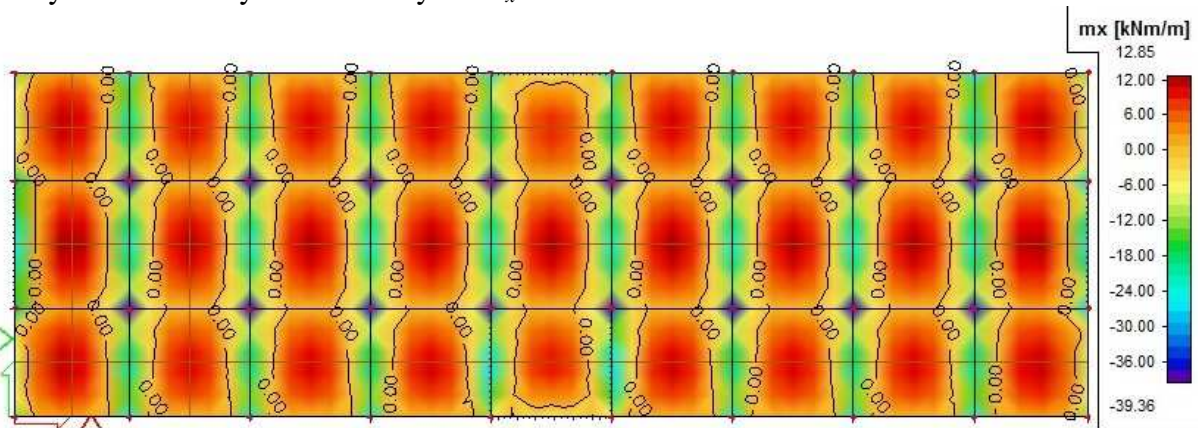


Postup výpočtu :

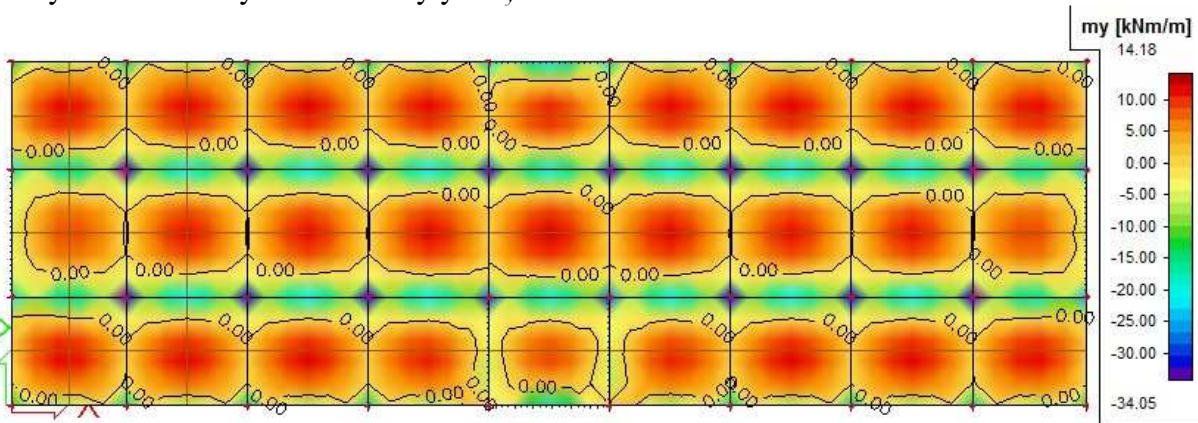
1. Vytvoření prostorového modelu konstrukce - patrový výsek
2. Numerický výpočet - lineární výpočet
3. Vytvoření průměrovacích pásů - pásy rozdělují konstrukci na oblasti v blízkosti průvlaků a oblasti poblíž středů rozpětí polí
4. Definování řezů na konstrukci - každým průměrovacím pásem proložený jeden řez
5. Vykreslení ohybových a kroutcích momentů na řezu - představují rovnoměrné rozdělení momentu po šířce pruhu

Průběhy ohybových a kroutcích momentů na desce :

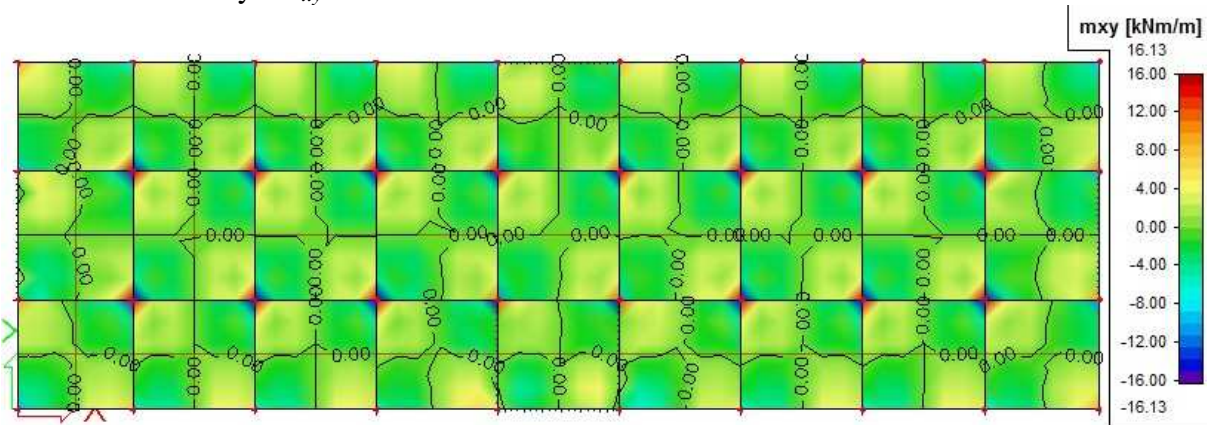
- ohybové momenty ve směru osy x - m_x :



- ohybové momenty ve směru osy y - m_y :

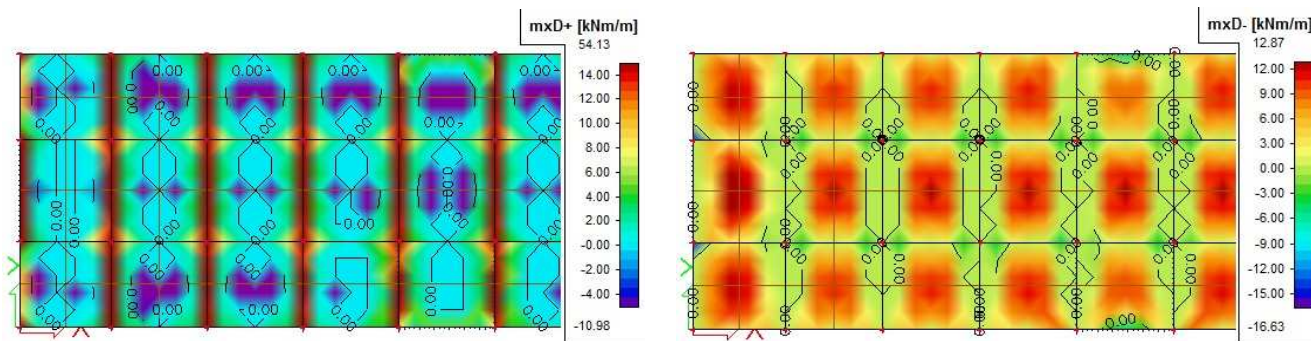


- kroutcí momenty - m_{xy} :

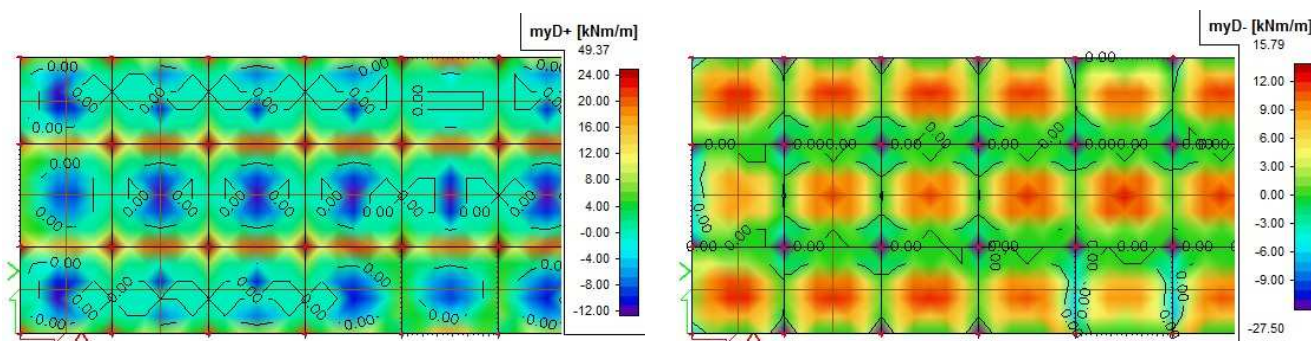


Vzhledem ke vzniku kroutících momentů dochází k natačení směru hlavních ohybových momentů. Při použití ortogonální výztuže ve směru os x a y je tak nutné uvažovat kombinační účinek ohybových a kroutících momentů. Pro tento účel poskytuje výpočetní software informaci o rozložení tzv. dimenzačních ohybové momenty.

- dimenzační ohybové momenty ve směru osy x - $m_{x,D}$:

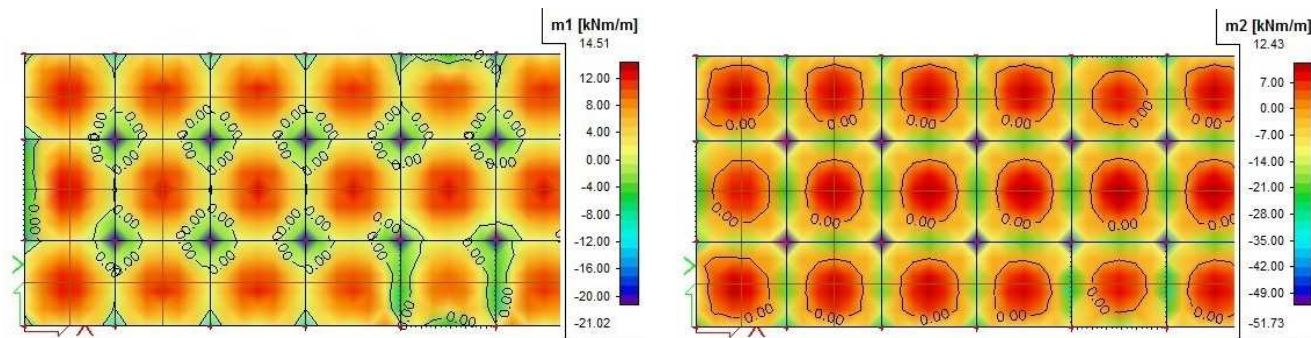


- dimenzační ohybové momenty ve směru osy y - $m_{y,D}$:

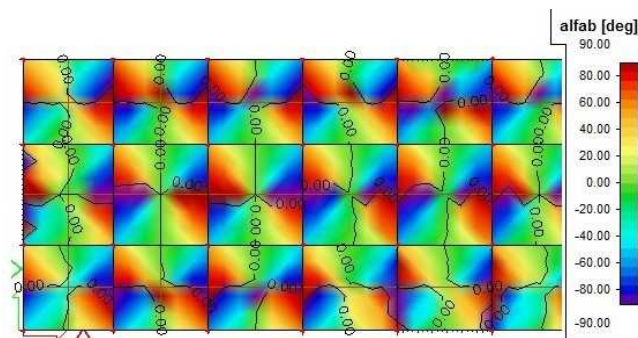


Pro názornost uvedeme i rozložení hlavních ohybových momentů :

- hlavní ohybové momenty - m_1 a m_2 :



- natočení hlavních ohybových momentů - α :

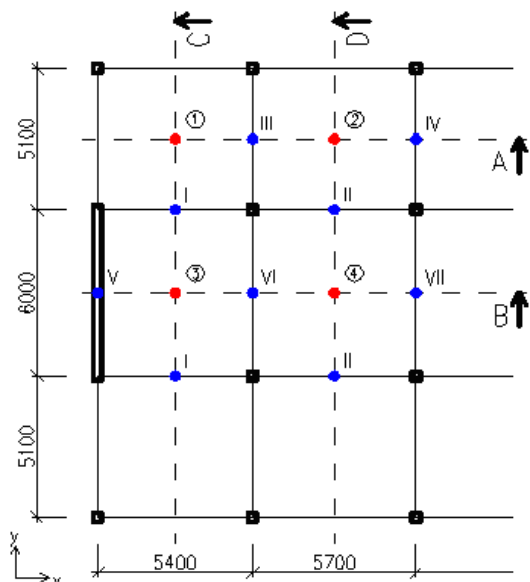


Srovnání ohybových a dimenzačních momentů

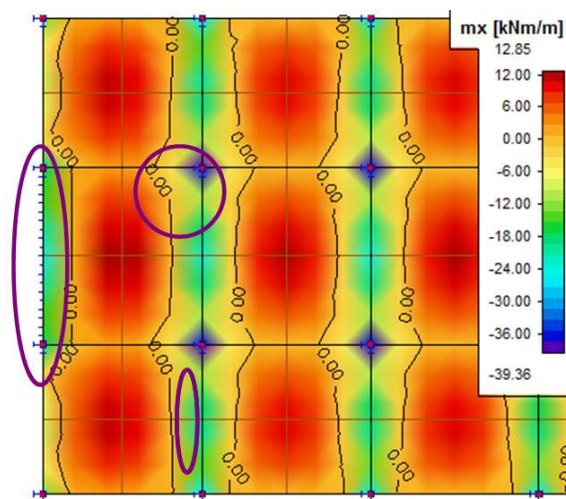
| Mezipodporové momenty [kN.m/m ²] | | | Podporové momenty [kN.m/m ²] | | |
|--|-------|---------|--|--------|---------|
| | ohyb. | dimenz. | | ohyb. | dimenz. |
| $m_{x,1}$ | 11,39 | 12,14 | m_I | -16,00 | -17,53 |
| $m_{y,1}$ | 11,09 | 11,90 | m_{II} | -20,68 | -20,68 |
| $m_{x,2}$ | 10,55 | 10,24 | m_{III} | -19,52 | -20,74 |
| $m_{y,2}$ | 11,85 | 11,86 | m_{IV} | -18,63 | -19,86 |
| $m_{x,3}$ | 12,65 | 12,65 | m_V | -24,00 | -24,00 |
| $m_{y,3}$ | 8,53 | 8,53 | m_{VI} | -22,99 | -23,00 |
| $m_{x,4}$ | 12,67 | 12,67 | m_{VII} | -23,50 | -23,52 |
| $m_{y,4}$ | 11,49 | 11,49 | | | |

IV. Srovnání výsledků tabulkového výpočtu a řešení MKP :

Pro prvotní srovnání výsledků tabulkové a numerické výpočetní metody (v obou případech srovnáván elastický výpočet) byla vybrána místa snadno analyzovatelná tabulkovými výpočty (**Obr. 1**). Hodnoty ohybových momentů a navržené vyztužení pro jednotlivé varianty výpočtu jsou uvedeny v následujících tabulkách. V druhé fázi byla věnována pozornost oblastem, jejichž napjatost tabulkový výpočet nepopisuje (**Obr. 2**) a v nich analyzovány odchylky řešení.



Obr. 1 Lokalizace vyšetřovaných momentů



Obr. 2 Problematické oblasti

- ohybové momenty [$\text{kN} \cdot \text{m/m}^2$] :

| Mezipodporové momenty [$\text{kN} \cdot \text{m/m}^2$] | | | |
|--|-------------------|-----------|---------------|
| | tabulkový výpočet | | MKP (dim.) |
| | elastický | plastický | |
| $m_{x,1}$ | 11,715 | 14,614 | 12,14 |
| $m_{v,1}$ | 13,206 | 17,456 | 11,90 |
| $m_{x,2}$ | 10,774 | 9,743 | 10,24 |
| $m_{v,2}$ | 14,324 | 16,038 | 11,86 |
| $m_{x,3}$ | 11,746 | 12,757 | 12,65 |
| $m_{v,3}$ | 8,821 | 7,649 | 8,53 |
| $m_{x,4}$ | 12,437 | 13,157 | 12,67 |
| $m_{v,4}$ | 11,246 | 10,135 | 11,49 |

| Podporové momenty [$\text{kN} \cdot \text{m/m}^2$] | | | |
|--|-------------------|-----------|---------------|
| | tabulkový výpočet | | MKP (dim.) |
| | elastické | plastické | |
| m_I | -22,979 | -18,674 | -17,53 |
| m_{II} | -21,368 | -18,262 | -20,68 |
| m_{III} | -24,086 | -16,644 | -20,74 |
| m_{IV} | -23,707 | -16,644 | -19,86 |
| m_V | -22,869 | -17,321 | -24,00 |
| m_{VI} | -23,095 | -17,267 | -23,00 |
| m_{VII} | -23,241 | -17,267 | -23,52 |

- dimenzování :

| Mezipodporový průřez [množství výztuže/ m^2] | | | |
|--|-------------------|-----------|---------|
| | tabulkový výpočet | | MKP |
| | elastický | plastický | |
| $m_{x,1}$ | 6 a 160 | 6 a 120 | 6 a 150 |
| $m_{v,1}$ | 6 a 130 | 6 a 100 | 6 a 150 |
| $m_{x,2}$ | 6 a 170 | 6 a 130 | 6 a 180 |
| $m_{v,2}$ | 6 a 120 | 6 a 110 | 6 a 150 |
| $m_{x,3}$ | 6 a 160 | 6 a 130 | 6 a 150 |
| $m_{v,3}$ | 6 a 200 | 6 a 140 | 6 a 210 |
| $m_{x,4}$ | 6 a 150 | 6 a 130 | 6 a 140 |
| $m_{v,4}$ | 6 a 160 | 6 a 140 | 6 a 150 |

| Podporová průřez [množství výztuže/ m^2] | | | |
|--|-------------------|-----------|---------|
| | tabulkový výpočet | | MKP |
| | elastické | plastické | |
| m_I | 8 a 130 | 8 a 160 | 8 a 170 |
| m_{II} | 8 a 140 | 8 a 170 | 8 a 150 |
| m_{III} | 8 a 130 | 8 a 200 | 8 a 160 |
| m_{IV} | 8 a 130 | 8 a 200 | 8 a 160 |
| m_V | 8 a 140 | 8 a 190 | 8 a 130 |
| m_{VI} | 8 a 140 | 8 a 190 | 8 a 140 |
| m_{VII} | 8 a 140 | 8 a 190 | 8 a 140 |

Odchyly v řešení jednotlivých metod

V případě středních částí deskových polí (mezipodporové průřezy) odpovídají hodnoty ohybových momentů zjištěné pomocí lineární MKP analýzy hodnotám elastického tabulkového výpočtu. Plastické momenty jsou dle očekávání v těchto místech vyšší.

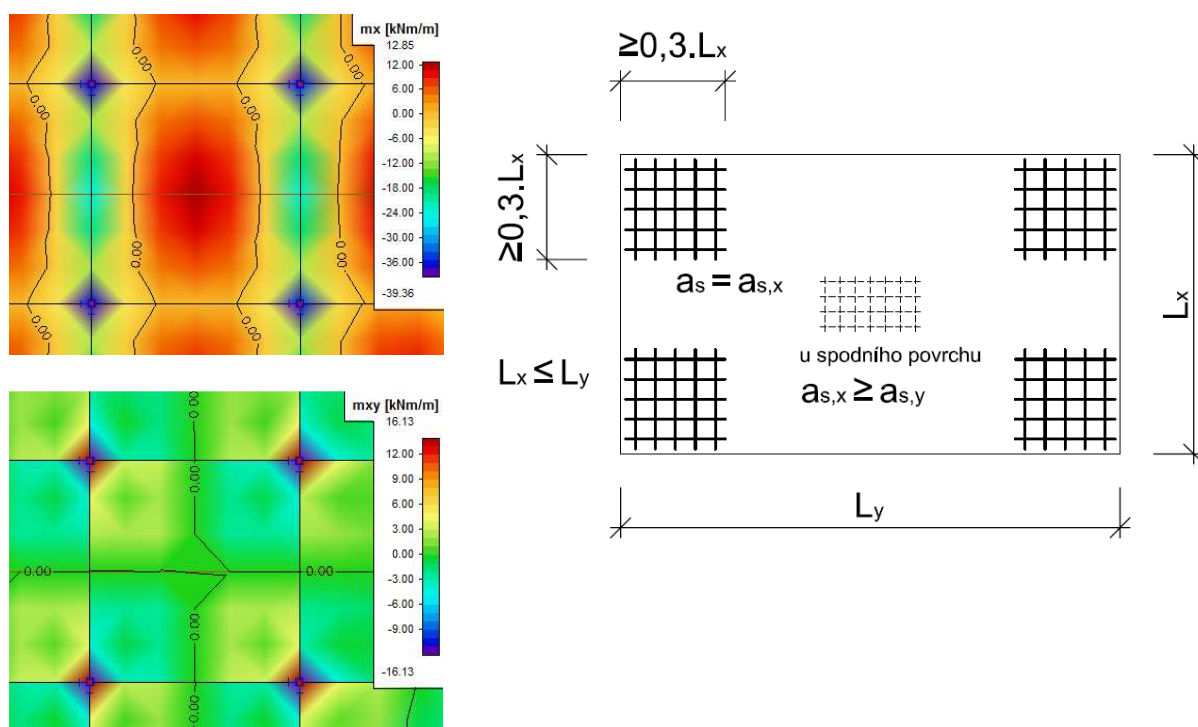
Rozdíly v podporových momentech nad středy průvlaků závisí na konkrétní poloze deskového pole v konstrukci. V případě momentů nad vnitřními průvlaky (**Obr. 1** - polohy II, VI a VII) jsou výsledky pružného řešení srovnatelné s výsledky MKP. V případě průvlaků mezi krajními deskovými poli (**Obr. 1** - polohy I, III, IV) vycházejí podporové deskové momenty v MKP výpočtu výrazně nižší, než v případě pružného tabulkového výpočtu. Příčinou je menší tuhost průvlaků krajních deskových polí, způsobená ohýbáním okrajových sloupů konstrukce. Podporové momenty stanovené při použití plastické analýzy jsou dle očekávání nižší než při analýze elastické.

Vzhledem ke zvolenému statickému schématu pro ruční tabulkový výpočet (kloub na konci spojitého nosníku) není možné tímto způsobem vyčíslit momenty nad okrajovými průvlaky. Výsledky numerického řešení ukazují, že vlivem torzní tuhosti průvlaků vznikají v těchto místech záporné ohybové momenty dosahující 0,5-0,7 násobku hodnot momentů v poli, v závislosti na poměru rozpětí konkrétního deskového pole.

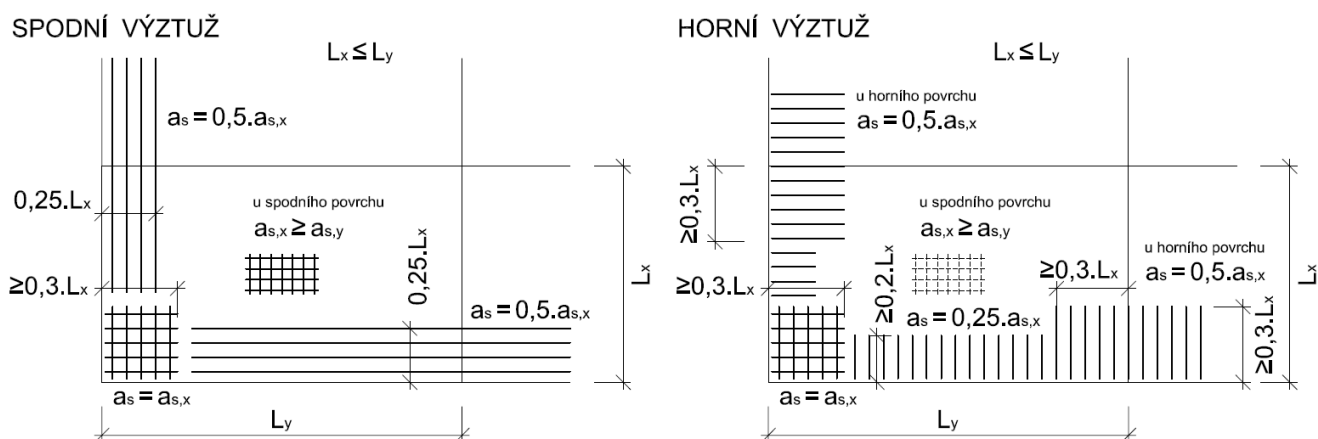
Konstrukční opatření

Řešení užitím statických tabulek sice umožňuje celkem přesný návrh nejexponovanějších míst desky z hlediska ohybových momentů, ale o zbývajících částech konstrukce neposkytuje téměř žádné informace. Tyto oblasti jsou obvykle navrhovány podle konstrukčních zásad.

Jednou z takových oblastí jsou rohy deskových polí. Vlivem zabránění zvedání rohů desky zde vznikají krouťící momenty. Z toho důvodu je nutné vyztužovat rohy deskových polí při spodním i horním povrchu. Při neznalosti konkrétních napjatostních poměrů se doporučuje pro vyztužení obou povrchů stejné množství výztuže, jako pro přenesení kladných momentů uprostřed deskových polí. Numerické řešení je schopné tuto napjatost vyčíslit a množství výztuže přizpůsobit konkrétnímu případu.



Další konstrukční doporučení se týká oblastí v těsné blízkosti průvlaků. V krajních pruzích desek je možné redukovat množství ohybové výztuže ve směru rovnoběžném s osou průvlatku na polovinu oproti výztuži použité ve střední části pole. Přesto provedená MKP analýza v některých takových oblastech odhaluje zvýšené namáhání desky ohybovým momentem, což poukazuje na nedostatečnou ohybovou tuhost průvlaků. Mírně odlišná napjatost byla predikována také v okolí napojení stropní desky na železobetonovou stěnu.



Ostatní hlediska srovnání výpočetních metod

Kromě přesnosti výpočtu je vhodné srovnat výpočetní metody i z jiných hledisek, jakými jsou rychlost řešení, obtížnost vyhodnocování výsledků a možnost jejich dalšího využití.

Ačkoli numerické řešení konstrukce může být v mnoha případech přesnější, nevýhodou takového postupu je často obtížnější vyhodnocování výsledků. Zejména v místech styku více konstrukčních prvků predikuje MKP lokální extrém, které neodpovídají skutečnosti. Tyto extrémní hodnoty je nutné pro účely návrhu redistribuovat, což prodlužuje proces vyhodnocení. U jednoduchých konstrukcí je tak rychlejší užití jednoduchých statických vzorců.

Z hlediska následného využití výsledků je řešení pomocí komplexní numerické řešení pomocí výpočetního softwaru jednoznačně výhodnější, neboť obsahuje řadu skrytých informací, které pro řešení daného problému sice nepotřebujeme, ale které nám v budoucnu mohou výrazně usnadnit práci. Toho lze využít např. při variantním řešení konstrukcí.

Závěr

Výpočetní metody je vhodné volit s ohledem na konkrétní konstrukci. Při výpočtech jednodušších konstrukcí dosahují pružný tabulkový výpočet a lineární analýza MKP srovnatelných výsledků. S rostoucí složitostí konstrukce se stává numerické řešení rychlejší a přesnější, přesto je v některých oblastech přistoupení k individuálnímu posouzení. Drobnou nevýhodou numerického řešení je v mnoha případech obtížnější vyhodnocování výsledků. Plastický výpočet ukazuje v obou zmíněných metodách značnou rezervu, jeho užití je však limitováno omezujícími podmínkami.

Poděkování :

Tato srovnávací studie byla zpracována za finanční podpory projektu FRVŠ 294/2012/G1.