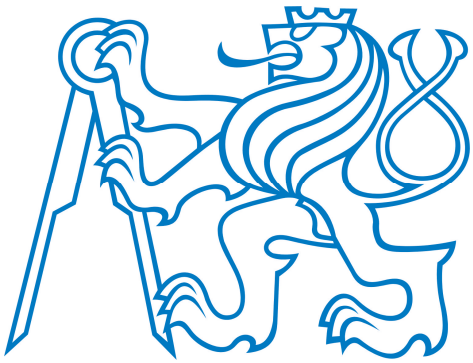
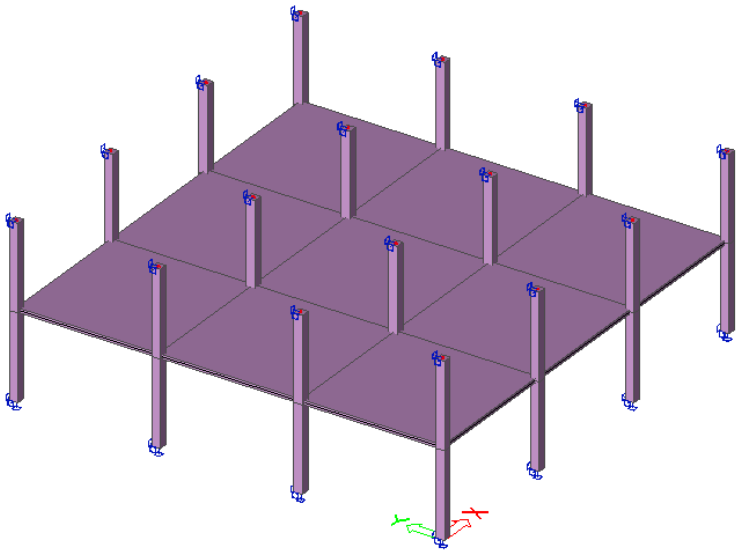


# P Ř Í K L A D  Č. 6

## LOKÁLNĚ PODEPŘENÁ ŽELEZOBETONOVÁ DESKA S VELKÝM UŽITNÝM ZATÍŽENÍM



**Projekt :** FRVŠ 2011 - Analýza metod výpočtu železobetonových lokálně podepřených desek

**Řešitelský kolektiv :** Ing. Martin Tipka
Ing. Josef Novák
Doc. Ing. Jitka Vašková, CSc.

všichni : Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

Je dán železobetonový monolitický skelet (viz schéma konstrukce). Návrhová hodnota užitného zatížení představuje dominantní složku zatížení a značně převyšuje návrhovou hodnotu zatížení stálého. Metodou součtových momentů je proveden návrh a posouzení stropní desky z hlediska ohybového namáhání. Výpočet je následně porovnán s numerickým řešením pomocí metody konečných prvků.

**Parametry konstrukce :**

konstrukční výška stropu : $h_d = 240\,mm$

krytí ohybové výztuže : $c = 25\,mm$

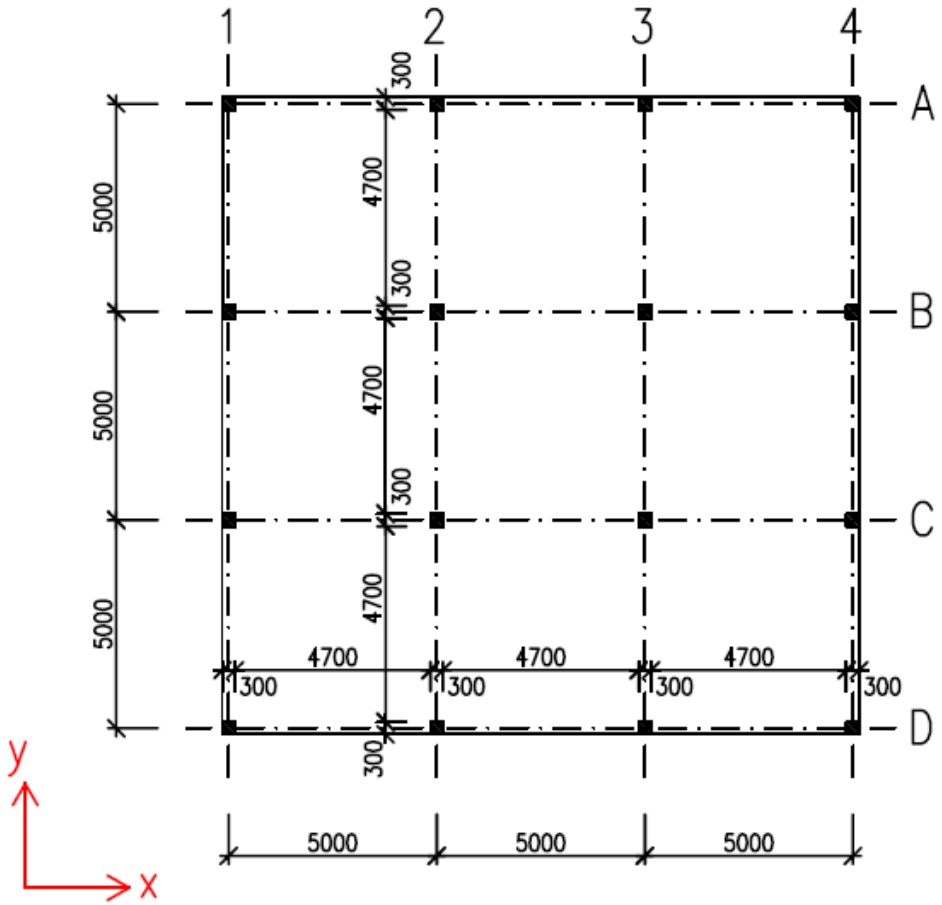
ostatní stálé zatížení : $(g - g_0)_k = 0{,}5\,kN/m^2$

užitné zatížení : $q_k = 10{,}0\,kN/m^2$

BETON : C 25/30

OCEL : B 500 B

**Schéma konstrukce :**




**Materiálové charakteristiky :**

beton : **C 25/30 XC2 (CZ) - *Cl* 0,1 - $D_{max}$ 16 - S1** $E_{cm} = 31\,GPa$

$f_{ck} = 25\,MPa$ $\qquad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1{,}5} = 16{,}666\,MPa$

ocel : **B 500 B** $\qquad E_s = 200\,GPa$

$f_{yk} = 500\,MPa$ $\qquad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{500}{1{,}15} = 434{,}783\,MPa$

**Výpočet zatížení stropní desky :**

stálé zatížení :

| skladba konstrukce | d [m] | $\rho_v$ | char. zatížení $g_K$ | $\gamma_G$ | návrh. zatížení $g_d$ |
|---|---|---|---|---|---|
| železobeton | 0,240 x | 2500 = | 6,000 kN/m$^2$ x | 1,35 = | 8,100 kN/m$^2$ |
| ostatní stálé zatížení | | | 0,500 kN/m$^2$ x | 1,35 = | 0,675 kN/m$^2$ |
| celkem | | | $g_k$ = 6,500 kN/m$^2$ | | $g_d$ = **8,775** kN/m$^2$ |
| proměnné zatížení : | | | | | |
| užitné zatížení | | | $q_k$ = 10,000 kN/m$^2$ x | 1,5 | $q_d$ = 15,000 kN/m$^2$ |
| **Celkem** | | | $(g+q)_k$ = 16,500 kN/m$^2$ | | $(g+q)_d$ = **23,775** kN/m$^2$ |

# I. Řešení metodou součtových momentů :

**Celkové součtové momenty [kN.m]:**

- vzhledem k symetrii konstrukce postačí řešit 2 sloupové pásy - pásy 1 a 2
- výpočet součtových momentů v pásu 1 :

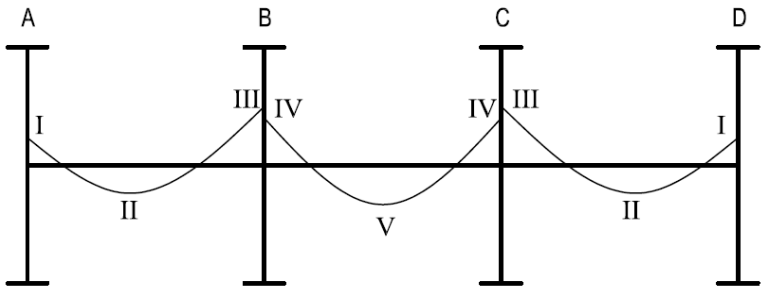
$$M_{tot,1} = \frac{1}{8} \cdot (g+q)_d \cdot b_1 \cdot l_{n,y}^2 = \frac{1}{8} \cdot 23{,}775 \cdot 2{,}65 \cdot 4{,}7^2 = 174{,}0\, kN \cdot m$$

- výpočet součtových momentů v pásu 2 :

$$M_{tot,2} = \frac{1}{8} \cdot (g+q)_d \cdot b_2 \cdot l_{n,y}^2 = \frac{1}{8} \cdot 23{,}775 \cdot 5{,}0 \cdot 4{,}7^2 = 328{,}2\, kN \cdot m$$

**Rozdělení celkových součtových momentů na kladné a záporné [kN.m] :**

| poloha | $\gamma$ | $M = \gamma \cdot M_{tot}$ | |
|---|---|---|---|
| | | pás 1 | pás 2 |
| **součt. m** | | **174,0** | **328,2** |
| I | 0,26 | 45,2 | 85,3 |
| II | 0,52 | 90,5 | 170,7 |
| III | 0,70 | 121,8 | 229,7 |
| IV | 0,65 | 113,1 | 213,3 |
| V | 0,35 | 60,9 | 114,9 |




- $g_d = 8{,}775\, kN/m^2 < 2 \cdot q_d = 2 \cdot 15{,}0 = 30{,}0\, kN/m^2$

⇨ je potřeba respektovat vliv soustředění nahodilého zatížení v řešeném poli při současném odlehčení polí sousedních ⇨ **momenty v poli budou zvětšeny součinitelem δ**

Výpočet součinitele $\delta$ :

- $\alpha_c \dfrac{\sum K_c}{\sum (K_s + K_b)} = \dfrac{55800}{285696 + 0} = 0{,}195$
  - sloupy : $I_c = \dfrac{1}{12} \cdot c_1 \cdot c_2^3 = \dfrac{1}{12} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3^3 = 6{,}75 \cdot 10^{-4}\ m^4$

    $\sum K_c = \dfrac{4 \cdot E \cdot I_c}{h_{konstr,nad}} + \dfrac{4 \cdot E \cdot I_c}{h_{konstr,pod}} = 2 \cdot \dfrac{4 \cdot 31 \cdot 10^6 \cdot 6{,}75 \cdot 10^{-4}}{3{,}0} = 55800\ kN \cdot m$
  - deska : $I_s = \dfrac{1}{12} \cdot b \cdot h_d^3 = \dfrac{1}{12} \cdot 5{,}0 \cdot 0{,}24^3 = 57{,}6 \cdot 10^{-4}\ m^4$

    $\sum K_s = \dfrac{4 \cdot E \cdot I_s}{l_y^{AB}} + \dfrac{4 \cdot E \cdot I_s}{l_y^{BC}} = \dfrac{4 \cdot 31 \cdot 10^6 \cdot 57{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot (5{,}0 + 5{,}0)}{5{,}0 \cdot 5{,}0} = 285696\ kN \cdot m$
  - průvlaky : nejsou ⇨ $\sum K_b = 0$
- $\alpha_{c,\min} = 1{,}447$ ..... interpolace z tabulky 2 : hodnoty $\alpha_{c,\min}$
  - $\dfrac{g_d}{q_d} = \dfrac{8{,}775}{15{,}0} = 0{,}585$ $\qquad \dfrac{L_2}{L_1} = \dfrac{L_y}{L_x} = \dfrac{5{,}0}{5{,}0} = 1{,}0$ $\qquad \alpha = 0$ ... není ztužující trám
  - interpolace dle $\dfrac{g_d}{q_d}$ : $\alpha_{c,\min} = 1{,}6 + \dfrac{0{,}7 - 1{,}6}{1{,}0 - 0{,}5} \cdot (0{,}585 - 0{,}5) = 1{,}447$
- $\delta = 1 + \dfrac{2 - \dfrac{g_d}{q_d}}{4 + \dfrac{g_d}{q_d}} \cdot \left(1 - \dfrac{\alpha_c}{\alpha_{c,\min}}\right) = 1 + \dfrac{2 - 0{,}585}{4 + 0{,}585} \cdot \left(1 - \dfrac{0{,}195}{1{,}447}\right) = 1{,}267$

Upravené rozdělení celkových součtových momentů na kladné a záporné [kN.m] :

| **poloha** | **γ** | $M = \gamma \cdot M_{tot}$ | |
|---|---|---|---|
| | | **pás 1** | **pás 2** |
| I | 0,26 | 45,2 | 85,3 |
| II | 0,52 | 114,7 | 216,3 |
| III | 0,70 | 121,8 | 229,7 |
| IV | 0,65 | 113,1 | 213,3 |
| V | 0,35 | 77,2 | 145,6 |

**Rozdělení celkových momentů do sloupového a středních pruhů [kN.m] :**

| **poloha** | **ω** | **sloupový pruh:** $M_{sloup} = \omega \cdot M$ | | **střední pruh :** $M_{stř} = (1 - \omega) \cdot M$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **pás 1** | **pás 2** | **pás 1** | **pás 2** |
| I | 1,00 | 45,2 | 85,3 | 0,0 | 0,0 |
| II | 0,60 | 68,8 | 102,4 | 45,9 | 68,3 |
| III | 0,75 | 91,4 | 172,3 | 30,5 | 57,4 |
| IV | 0,75 | 84,8 | 160,0 | 28,3 | 53,3 |
| V | 0,60 | 46,3 | 68,9 | 30,9 | 45,9 |

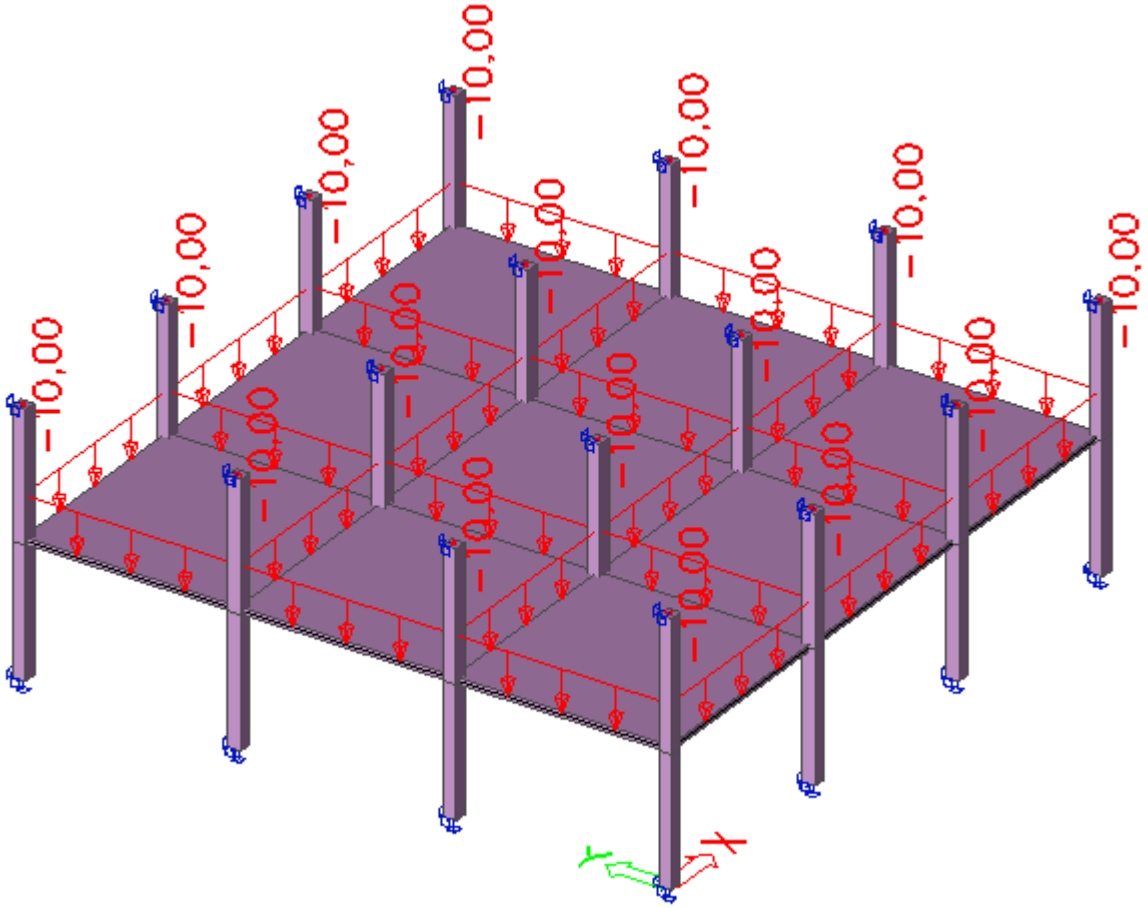
**Přepočet momentů na běžný metr desky [kN.m/m´]:**

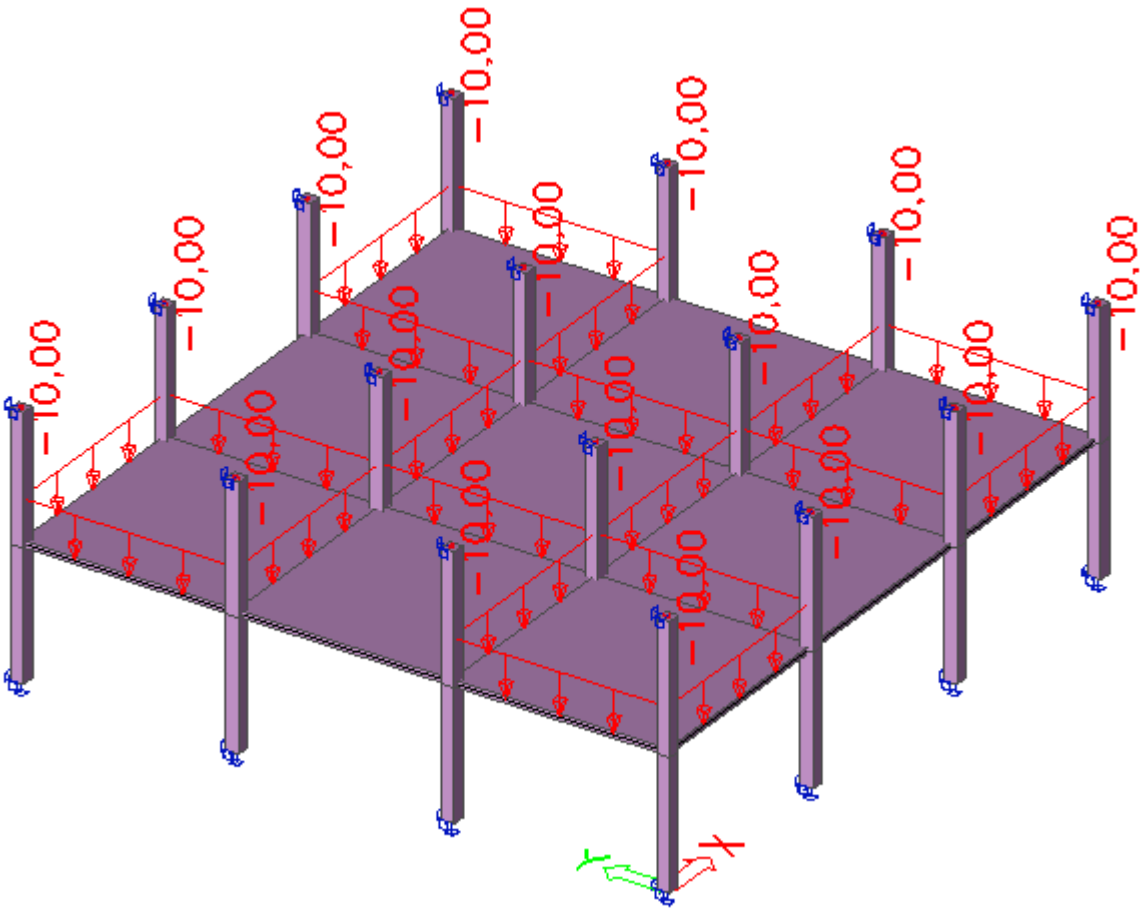
| poloha | sloupový pruh | | | | střední pruh | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | pás 1 | | pás 2 | | pás 1 | | pás 2 | |
| | b | $m_{sloup}$ | b | $m_{sloup}$ | b | $m_{stř}$ | b | $m_{stř}$ |
| I | 1,4 | 32,3 | 2,5 | 34,1 | 1,25 | 0,0 | 2,5 | 0,0 |
| II | | 49,2 | | 41,0 | | 36,7 | | 27,3 |
| III | | 65,3 | | 68,9 | | 24,4 | | 23,0 |
| IV | | 60,6 | | 64,0 | | 22,6 | | 21,3 |
| V | | 33,1 | | 27,6 | | 24,7 | | 18,4 |

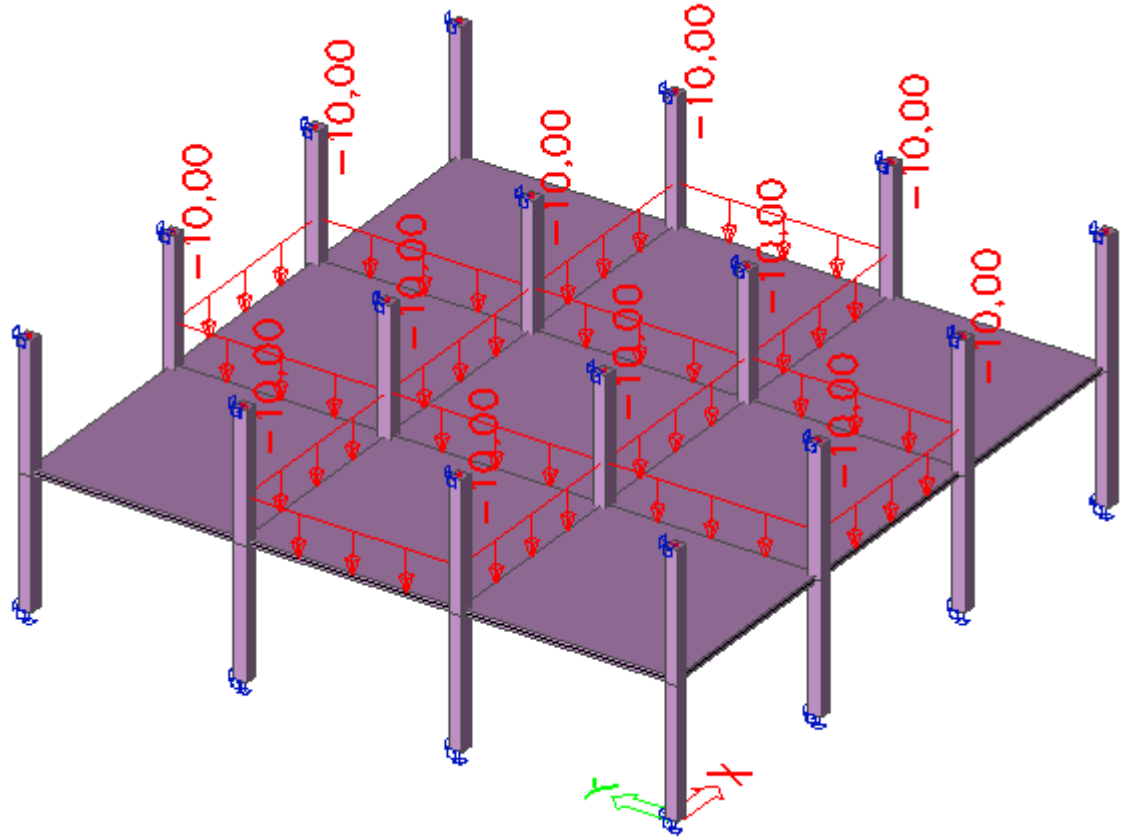
## II. Numerické řešení metodou konečných prvků :

Jako výpočetní model pro metodu konečných prvků byl zvolen patrový výsek konstrukce. Tento model zohledňuje vliv tuhosti svislých nosných konstrukcí nad i pod vyšetřovanou rovinou.

Výpočetní model konstrukce :



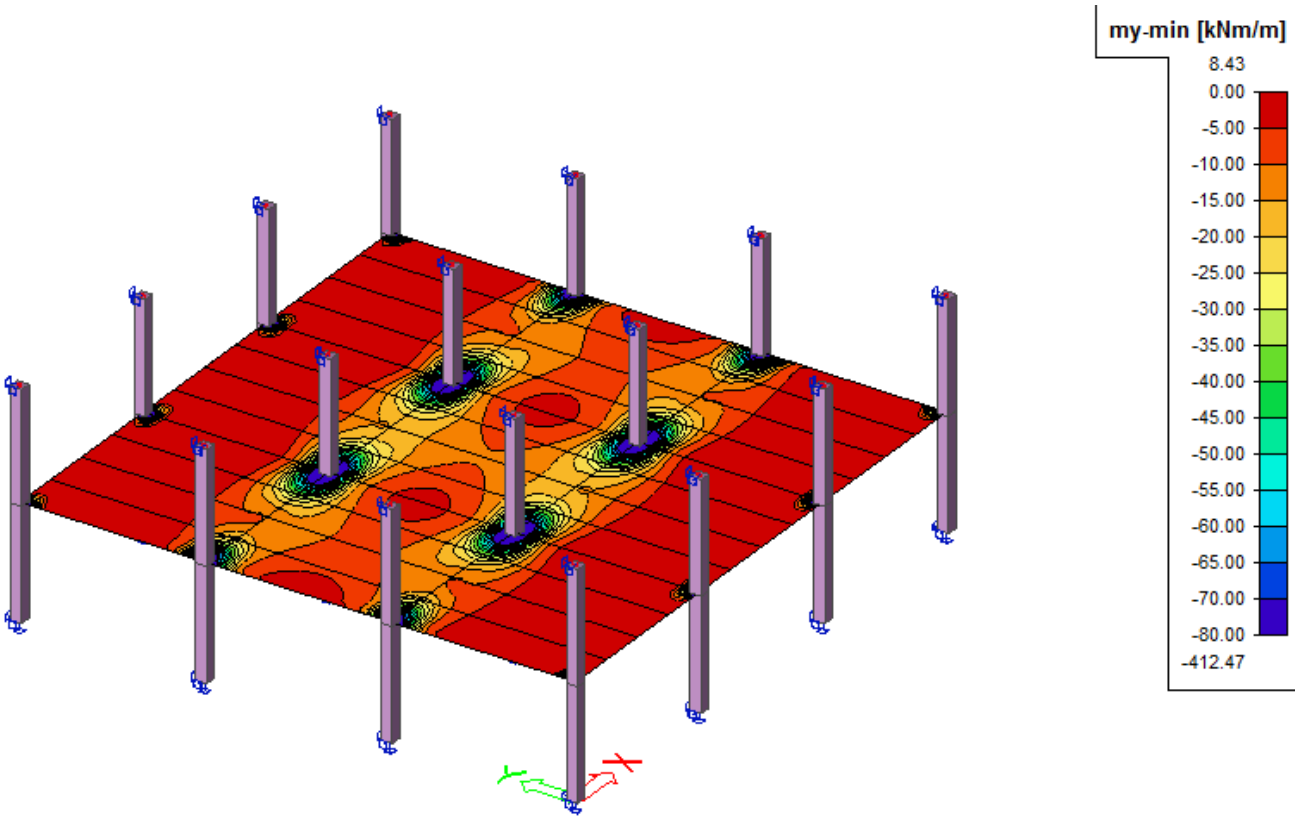

-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
Y
X


-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
-10,00
Y
X

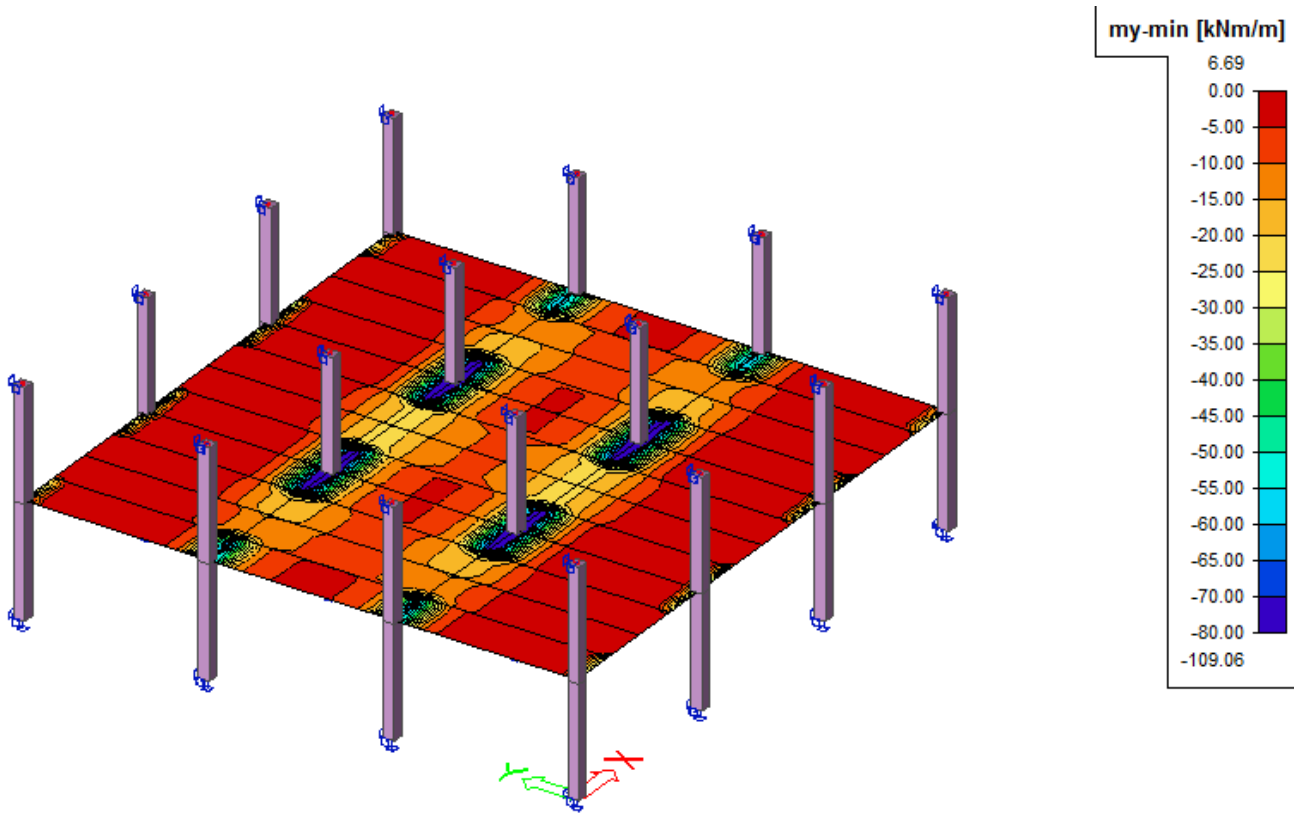
**Výsledný průběh ohybových momentů na desce :**

obálka minimum - největší záporné momenty :

- bez redistribuce momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :

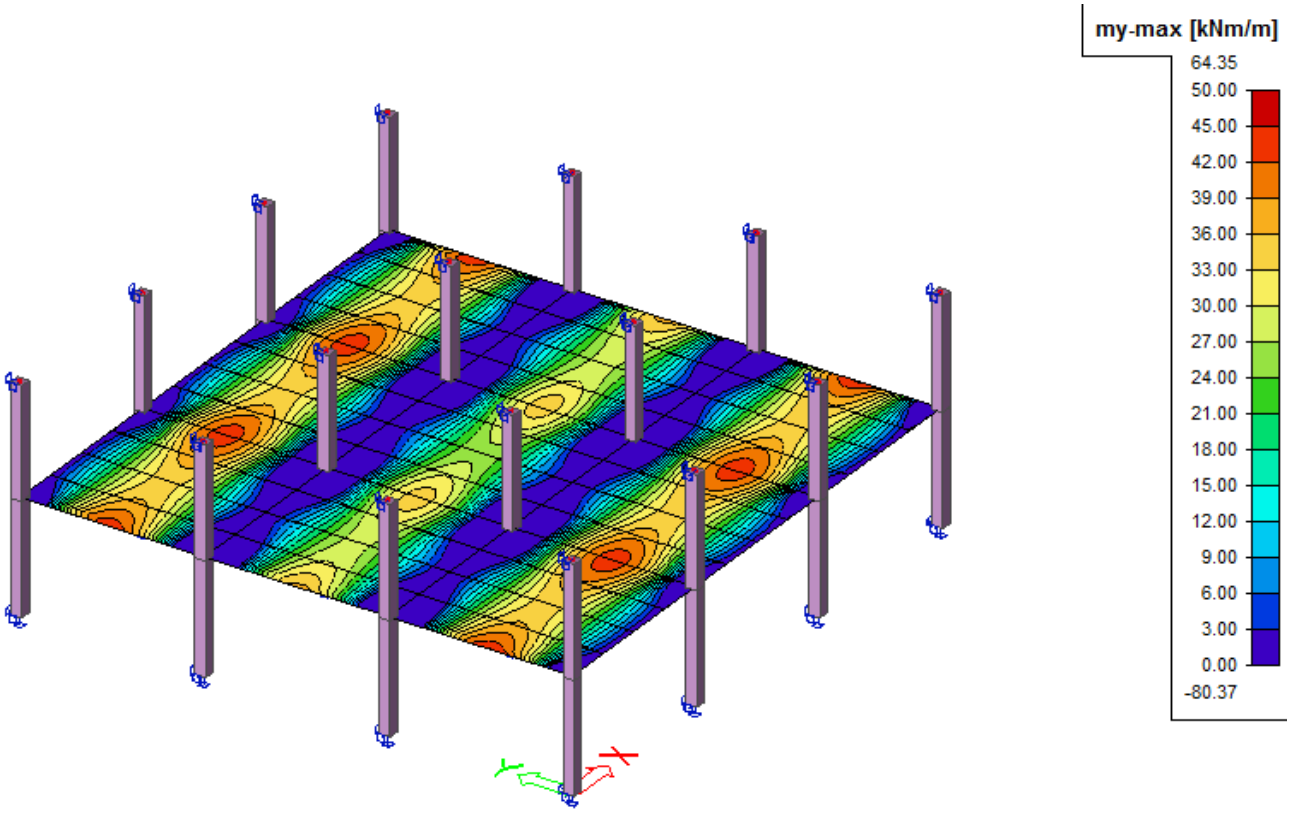



- s redistribucí momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :

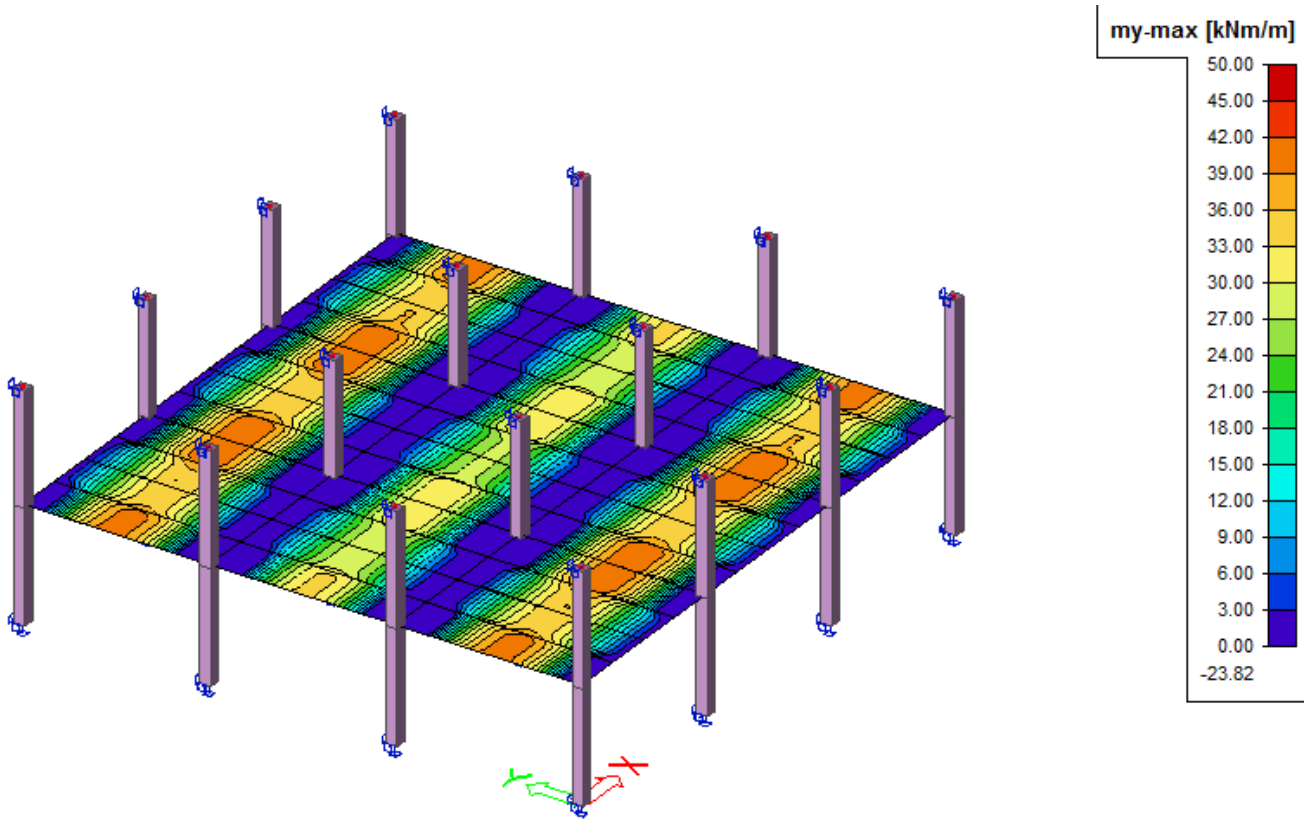


obálka maximum - největší kladné momenty :

- bez redistribuce momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :




- s redistribucí momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :



## III. Srovnání výsledků řešení MSM a MKP :

**Dimenzování - ohybová výztuž :**

- $h_d = 240mm$ , $c_d = 25mm$
- předpoklad vyztužení desky : $\varnothing_{d,x} = 12$ mm ⇨ $d_x = 240 - 25 - 6 = 209\,mm$
  $\varnothing_{d,y} = 12$ mm ⇨ $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\,mm$

- minimální plocha výztuže :

$$a_{s,\min} = 0{,}0015 \cdot b \cdot d_x = 0{,}0015 \cdot 1000 \cdot 209 = 313{,}5\,mm^2/m`$$

$$= 0{,}26 \cdot \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot d_x}{f_{yk}} = 0{,}26 \cdot \frac{2{,}6 \cdot 1000 \cdot 209}{500} = 282{,}6\,mm^2/m`$$

$$= \frac{k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct}}{\sigma_s} = \frac{0{,}4 \cdot 1{,}0 \cdot 2{,}6 \cdot 1000 \cdot 240/2}{500} = 249{,}6\,mm^2/m´$$

⇨ konstrukční vyztužení : **4 × ∅ 10mm** $a_{s,konst} = 314\,mm^2 \geq a_{s,\min}$

Vyztužení pásu 1 : $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\,mm$

| pás 1 | | metoda součtových momentů | | | numerické řešení - MKP | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $m_{Ed}$ [kN.m/m´] | NÁVRH | $m_{Rd}$ [kN.m/m´] | $m_{Ed}$ [kN.m/m´] | NÁVRH | $m_{Rd}$ [kN.m/m´] |
| I (H) | sloupový | 32,3 | **5 x ϕ 10** | 32,8 | 29,0 | **5 x ϕ 10** | 32,8 |
| | střední | 0,0 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 0,4 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| II (D) | sloupový | 49,2 | **8 x ϕ 10** | 51,6 | 40,6 | **7 x ϕ 10** | 45,4 |
| | střední | 36,7 | **6 x ϕ 10** | 39,1 | 35,2 | **6 x ϕ 10** | 39,1 |
| III (H) | sloupový | 65,3 | **8 x ϕ 12** | 72,9 | 67,3 | **8 x ϕ 12** | 72,9 |
| | střední | 24,4 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 14,5 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| IV (H) | sloupový | 60,6 | **8 x ϕ 12** | 72,9 | 63,6 | **8 x ϕ 12** | 72,9 |
| | střední | 22,6 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 14,5 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| V (D) | sloupový | 33,1 | **6 x ϕ 10** | 39,1 | 33,7 | **6 x ϕ 10** | 39,1 |
| | střední | 24,7 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 28,8 | **5 x ϕ 10** | 32,8 |

Vyztužení pásu 2 : $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\,mm$

| pás 2 | | metoda součtových momentů | | | numerické řešení - MKP | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $m_{Ed}$ [kN.m/m´] | NÁVRH | $m_{Rd}$ [kN.m/m´] | $m_{Ed}$ [kN.m/m´] | NÁVRH | $m_{Rd}$ [kN.m/m´] |
| I (H) | sloupový | 34,1 | **6 x ϕ 10** | 39,1 | 36,4 | **6 x ϕ 10** | 39,1 |
| | střední | 0,0 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 1,6 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| II (D) | sloupový | 41,0 | **7 x ϕ 10** | 45,4 | 41,6 | **7 x ϕ 10** | 45,4 |
| | střední | 27,3 | **5 x ϕ 10** | 32,8 | 36,0 | **6 x ϕ 10** | 39,1 |
| III (H) | sloupový | 68,9 | **8 x ϕ 12** | 72,9 | 89,1 | **10 x ϕ 12** | 89,6 |
| | střední | 23,0 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 22,4 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| IV (H) | sloupový | 64,0 | **8 x ϕ 12** | 72,9 | 84,8 | **10 x ϕ 12** | 89,6 |
| | střední | 21,3 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 22,3 | **4 x ϕ 10** | 26,3 |
| V (D) | sloupový | 27,6 | **5 x ϕ 10** | 32,8 | 32,8 | **5 x ϕ 10** | 32,8 |
| | střední | 18,4 | **4 x ϕ 10** | 26,3 | 29,0 | **5 x ϕ 10** | 32,8 |

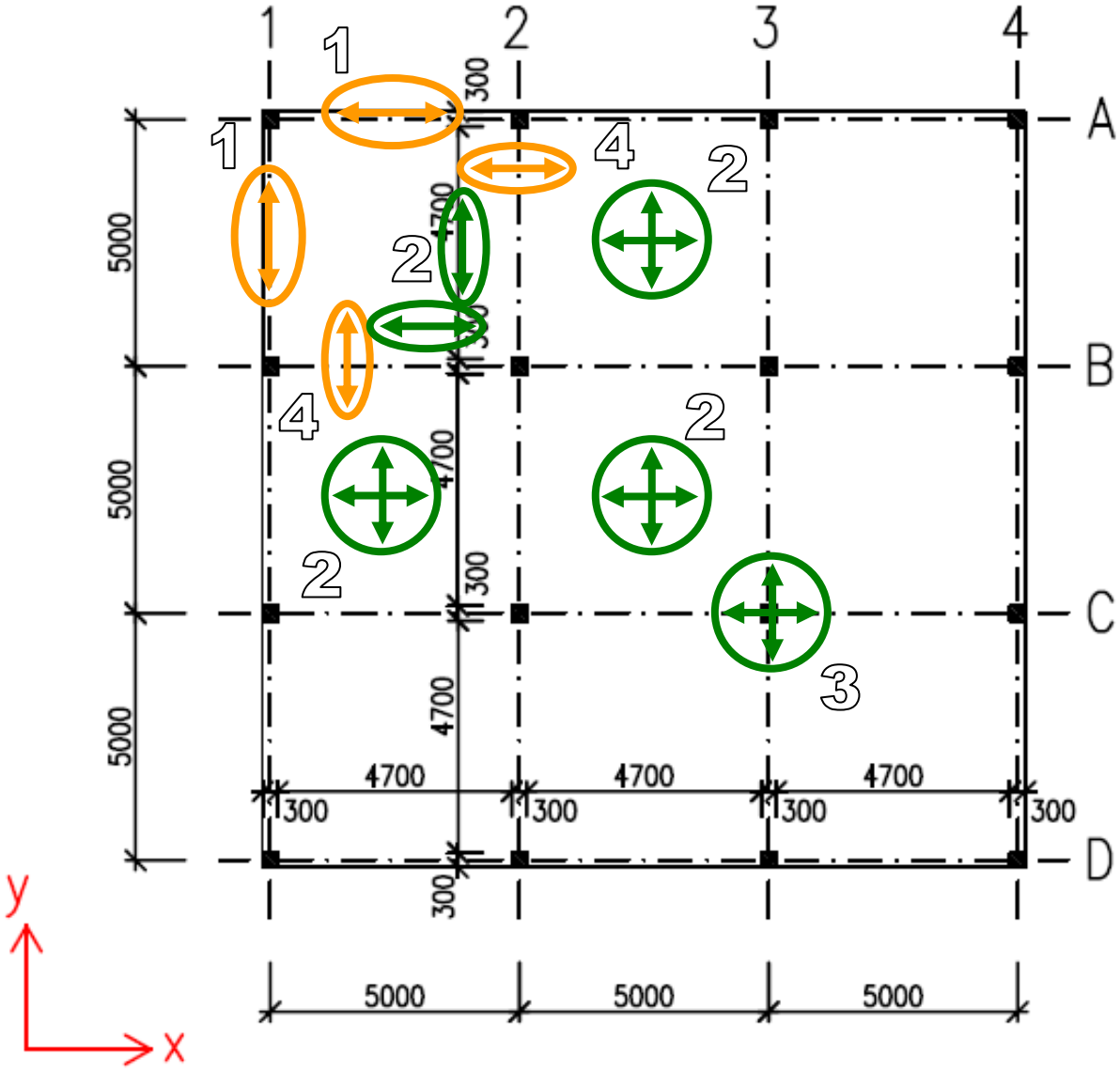
- větší hodnoty v případě MKP
- větší hodnoty v případě metody součtových momentů

**Vyhodnocení :**

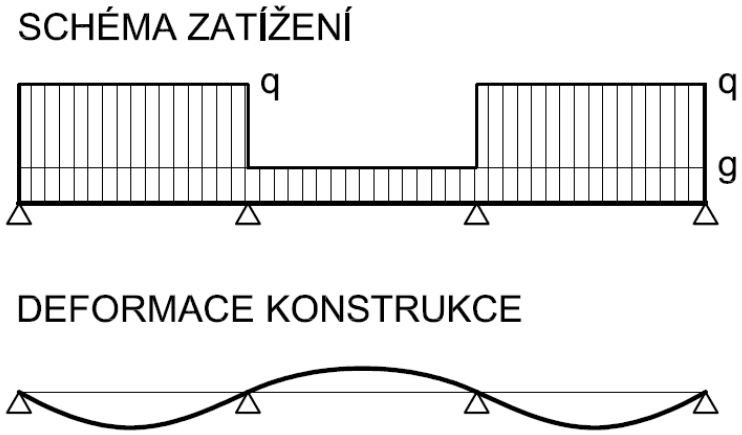
Podmínkou pro použití metody součtových momentů dle normy ČSN 73 1204, resp. ČSN 73 1201 je skutečnost, že konstrukce bude zatížena pouze svislým zatížením rovnoměrně rozděleným po celém deskovém poli, přičemž charakteristická hodnota nahodilého zatížení nebude větší než 2,2 násobek charakteristického zatížení stálého.

V tomto případě je návrhová hodnota nahodilého zatížení $q_k = 10\,kN/m^2 = 1{,}54 \cdot g_k$, což splňuje výše uvedenou podmínku. Přesto je hodnota nahodilého již tak vysoká, že při výpočtu může docházet k výraznějším odchylkám od skutečného chování. Z toho důvodu byla provedena srovnávací studie výpočtu metodou součtových momentů (MSM) a metodou konečných prvků (MKP).

Při srovnání výsledků obou metod byla vytipována kritická místa konstrukce a v nich analyzovány odchylky řešení :



- **sloupový pruh rohového pole :** V oblasti rohového pole odhaluje MKP menší ohybové momenty ve sloupových pruzích, než které stanovila MSM. Navýšení momentů v poli součinitelem δ pravděpodobně v rohovém poli zcela neodpovídá skutečnosti. 1
- **střední pruhy vnitřních pásů :** Veškeré střední pruhy vnitřních pásů jsou při použití MSM značně podceněny. Momenty ve všech polích kromě rohových jsou větší, než jak ukazuje tato metoda. Součinitel δ, používaný v MSM pro navýšení momentů v poli vlivem velkého proměnného zatížení, není schopen dostatečně vystihnout chování takto zatížené konstrukce (extrémní hodnota proměnného zatížení). 2
- **vnitřní sloup :** Momenty nad vnitřními podporami jsou při použití MSM podceněny až o 20-25%. Stejně jako v předchozích příkladech lze částečnou příčinu hledat v metodice stanovení hledaného momentu a rozdílných parametrech vstupujících do výpočtu. 3
- **střední pruh krajního pásu :** Střední pruhy krajních pásů nad podporou vykazují při výpočtu MKP o 40% menší hodnotu než v případě výpočtu MSM. Tato skutečnost souvisí, podobně jako u oblasti rohových sloupů, s neschopností ruční metody postihnout napjatost okrajových částí desky. 4




Možné chování konstrukce při extrémní hodnotě proměnného zatížení

Závěr :

Při zatížení konstrukce extrémním proměnným zatížením, dochází při použití klasického postupu výpočtu metodou součtových momentů ke značným odchylkám od chování zjištěného metodou konečných prvků. Technické předpisy si jsou této skutečnosti vědomy, a proto hodnotu proměnného zatížení omezují. Hlavním důvodem omezení hodnoty nahodilého zatížení ($q_k \leq 2{,}2 \cdot g_k$), je fakt, že v opačném případě hrozí, že při určité kombinaci zatížení účinek proměnného zatížení na okolních deskách zcela otočí napjatost na desce vyšetřované. Extrémní zatížení okolních polí vyvolá tah v horních vláknech celého vyšetřovaného pole. Takové pole je nutné dimenzovat při obou površích, což zjednodušená metoda součtových momentů vůbec není schopna postihnout. Pokud se tedy reálně taková konstrukce naskytne (vysoká hodnota proměnného zatížení), nelze výpočet pomocí metody součtových momentů vůbec realizovat.

*Poděkování :*

*Tato srovnávací studie byla zpracována za finanční podpory projektu FRVŠ 905/2011/G1.*