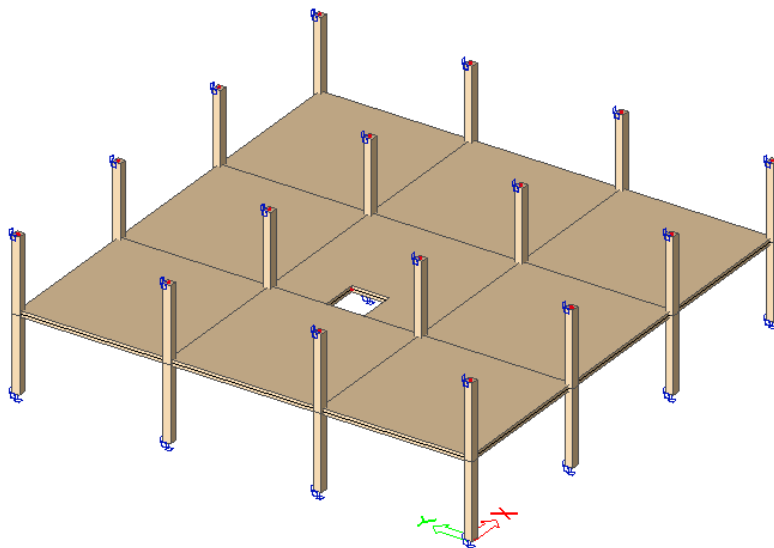




PŘÍKLAD Č. 4

LOKÁLNĚ PODEPŘENÁ ŽELEZOBETONOVÁ DESKA S OTVOREM VE SLOUPOVÉM PRUHU



Projekt : FRVŠ 2011 - Analýza metod výpočtu železobetonových lokálně podepřených desek

Řešitelský kolektiv : Ing. Martin Tipka
Ing. Josef Novák
Doc. Ing. Jitka Vašková, CSc.

všichni : Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

Je dán železobetonový monolitický skelet (viz schéma konstrukce). Prostřední deskové pole je ve sloupovém pruhu oslabeno prostupem. Metodou součtových momentů je proveden návrh a posouzení stropní desky v okolí prostupu z hlediska ohybového namáhání. Výpočet je následně porovnán s numerickým řešením pomocí metody konečných prvků.

Parametry konstrukce :

konstrukční výška stropu : $h_d = 240 \text{ mm}$

ostatní stálé zatížení : $(g - g_0)_k = 1,0 \text{ kN/m}^2$

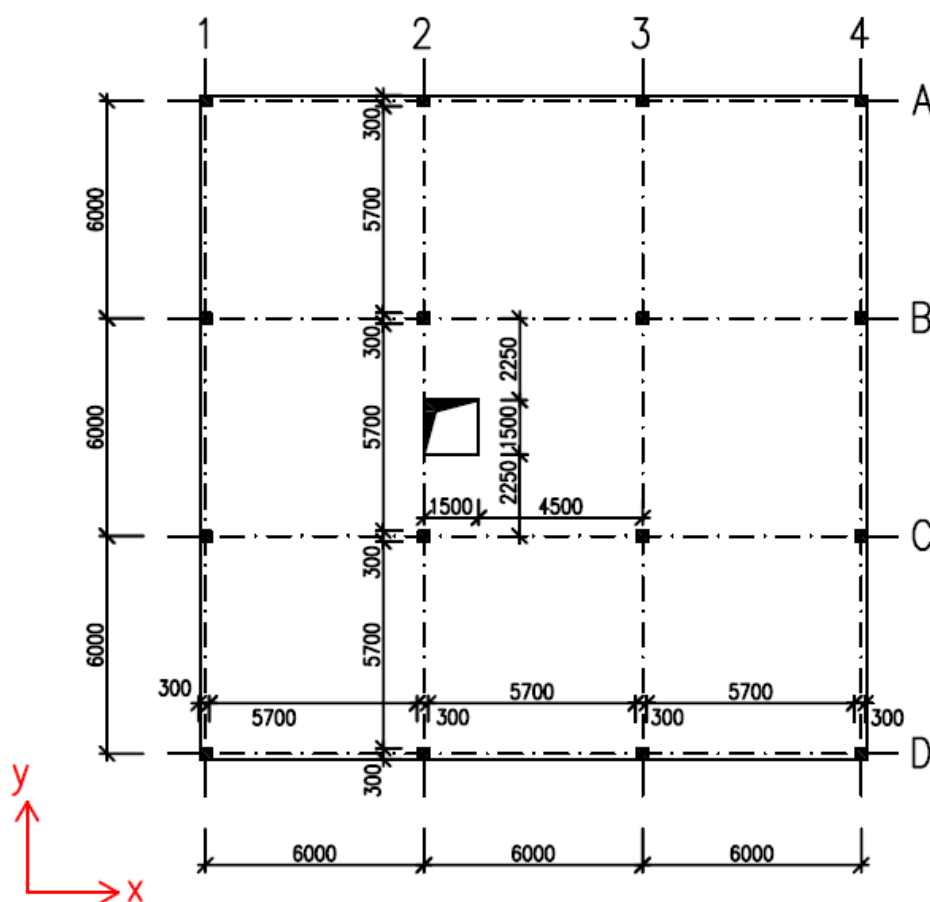
krytí ohybové výztuže : $c = 25 \text{ mm}$

užitné zatížení : $q_k = 3,0 \text{ kN/m}^2$

BETON : C 25/30

OCEL : B 500 B

Schéma konstrukce :



Materiálové charakteristiky :

beton : C 25/30 XC2 (CZ) - CI 0,1 - D_{max} 16 - S1 $E_{cm} = 31 \text{ GPa}$

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa} \quad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{25}{1,5} = 16,666 \text{ MPa}$$

ocel : B 500 B $E_s = 200 \text{ GPa}$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{500}{1,15} = 434,783 \text{ MPa}$$

Výpočet zatížení stropní desky :

stálé zatížení :

skladba konstrukce	d [m]	ρ_v	char. zatížení g_k	γ_G	návrh. zatížení g_d
železobeton	0,240 x	2500	= 6,000 kN/m ²	x 1,35	= 8,100 kN/m ²
ostatní stálé zatížení			1,000 kN/m ²	x 1,35	= 1,350 kN/m ²
celkem			$g_k = 7,000$ kN/m ²		$g_d = 9,450$ kN/m ²
<u>proměnné zatížení :</u>					
užitné zatížení			$q_k = 3,000$ kN/m ²	x 1,5	$q_d = 4,500$ kN/m ²
Celkem			$(g+q)_k = 10,000$ kN/m ²		$(g+q)_d = 13,950$ kN/m ²

I. Řešení metodou součtových momentů :

Celkové součtové momenty [kN.m]:

➤ vzhledem k částečné symetrii konstrukce budou řešeny sloupové pásy 1, 2, 3, A a B

- výpočet součtových momentů v pásu 1, A :

$$M_{tot,1,A} = \frac{1}{8} \cdot (g + q)_d \cdot b_1 \cdot l_{n,y}^2 = \frac{1}{8} \cdot 13,95 \cdot 3,15 \cdot 5,7^2 = 178,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

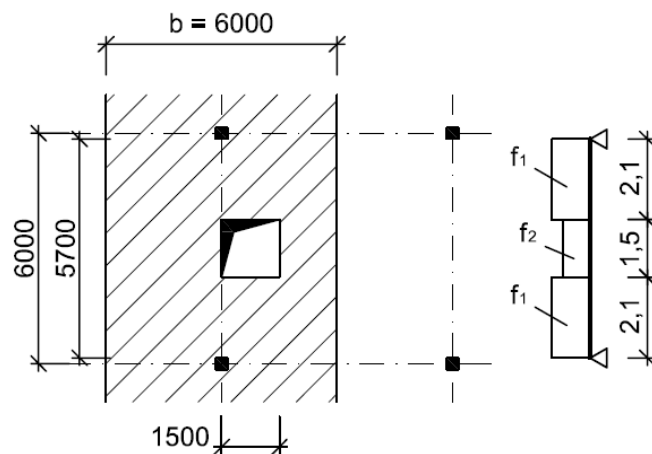
- výpočet součtových momentů v pásích 2 a 3 a přibližně i v pásu B :

$$M_{tot,2,3,B} = \frac{1}{8} \cdot (g + q)_d \cdot b_2 \cdot l_{n,y}^2 = \frac{1}{8} \cdot 13,95 \cdot 6,0 \cdot 5,7^2 = 339,9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- o ve vnitřním poli pásu 2 :

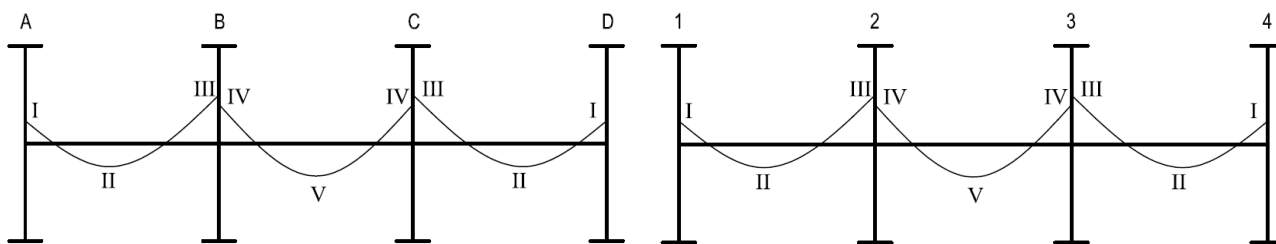
$$f_1 = (g + q)_d \cdot b = 13,95 \cdot 6 = 83,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= (g + q)_d \cdot (b - 1,5) = \\ &= 13,95 \cdot (6 - 1,5) = 62,775 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_{tot,2,int} &= \frac{f_1 \cdot (2,1 + 2,1) + f_2 \cdot 1,5}{2} \cdot \left(2,1 + \frac{1,5}{2}\right) - f_1 \cdot 2,1 \cdot \left(\frac{2,1 + 1,5}{2}\right) - f_2 \cdot \frac{1,5}{2} \cdot \frac{1,5}{4} = \\ &= \frac{83,7 \cdot (2,1 + 2,1) + 62,775 \cdot 1,5}{2} \cdot \left(2,1 + \frac{1,5}{2}\right) - 83,7 \cdot 2,1 \cdot \left(\frac{2,1 + 1,5}{2}\right) - 62,775 \cdot \frac{1,5}{2} \cdot \frac{1,5}{4} = \\ &= 301,1 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Rozdělení celkových součtových momentů na kladné a záporné [kN.m] :



poloha	γ	$M = \gamma \cdot M_{tot}$				
		pás 1	pás 2	pás 3	pás A	pás B
součt. m		178,5	339,9	339,9	178,5	339,9
I	0,26	46,6	88,4	88,4	46,6	88,4
II	0,52	92,8	176,7	176,7	92,8	176,7
III	0,70	125,0	237,9	237,9	125,0	237,9
součt. m		178,5	301,1	339,9	178,5	339,9
IV	0,65	116,0	195,7	220,9	116,0	220,9
V	0,35	62,5	105,4	119,0	62,5	119,0

Rozdělení celkových momentů do sloupového a středních pruhů [kN.m] :

poloha	ω	sloupový pruh : $M_{sloup} = \omega \cdot M$					střední pruh : $M_{stř} = (1 - \omega) \cdot M$				
		pás 1	pás 2	pás 3	pás A	pás B	pás 1	pás 2	pás 3	pás A	pás B
I	1,00	46,6	88,4	88,4	46,6	88,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
II	0,60	55,7	106,0	106,0	55,7	106,0	37,1	70,7	70,7	37,1	70,7
III	0,75	93,8	178,4	178,4	93,8	178,4	31,3	59,5	59,5	31,3	59,5
IV	0,75	87,0	146,8	165,7	87,0	165,7	29,0	48,9	55,2	29,0	55,2
V	0,60	37,5	63,2	71,4	37,5	71,4	25,0	42,2	47,6	25,0	47,6

Přepočítání momentů na běžný metr desky [kN.m/m']:

- sloupový pruh :

poloha	pás 1		pás 2		pás 3		pás A		pás B	
	b	m_{sloup}	b	m_{sloup}	b	m_{sloup}	b	m_{sloup}	b	m_{sloup}
I	1,65	28,3	3,0	29,5	3,0	29,5	1,65	28,3	3,0	29,5
II	1,65	33,8	3,0	35,3	3,0	35,3	1,65	33,8	3,0	35,3
III	1,65	56,8	3,0	59,5	3,0	59,5	1,65	56,8	3,0	59,5
IV	1,65	52,7	3,0	48,9	3,0	55,2	1,65	52,7	3,0	52,1
V	1,65	22,7	1,5	42,1	3,0	23,8	1,65	22,7	3,0	22,4

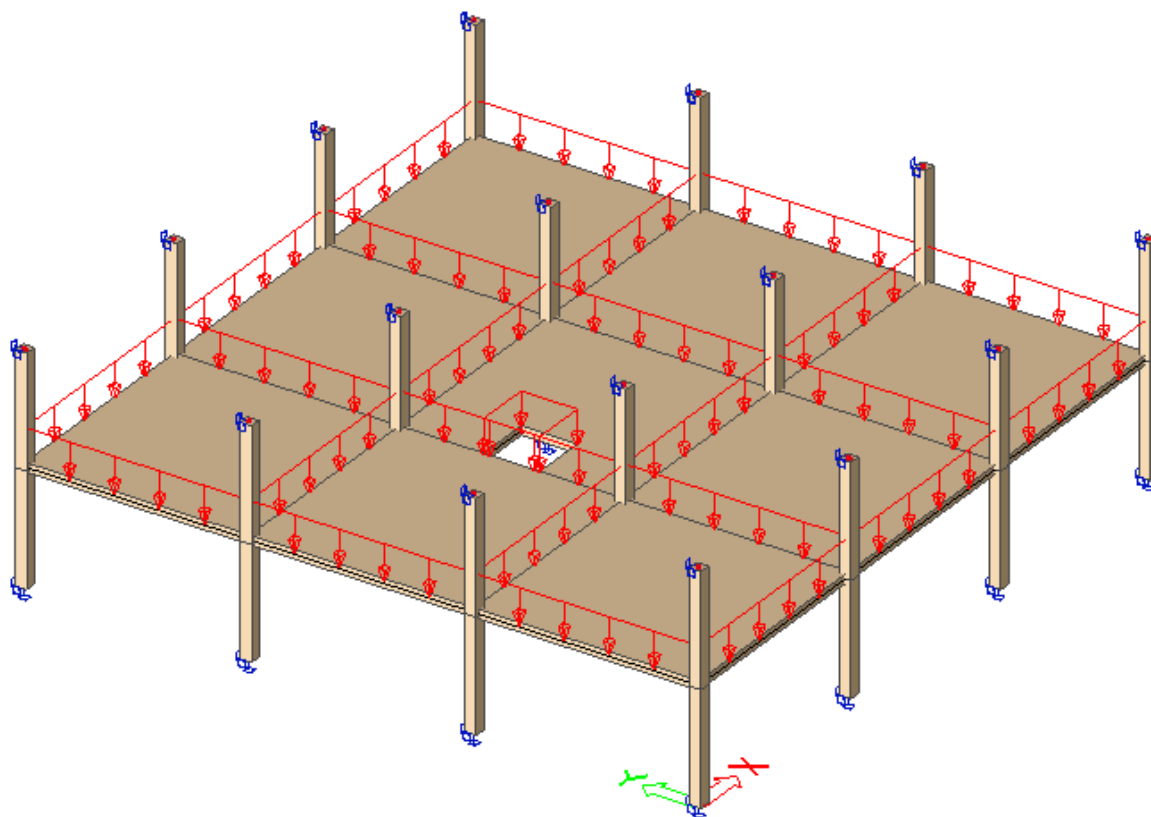
- střední pruh :

poloha	pás 1		pás 2		pás 3		pás A		pás B	
	b	$m_{stř}$	b	$m_{stř}$	b	$m_{stř}$	b	$m_{stř}$	b	$m_{stř}$
I	1,5	0,0	3,0	0,0	3,0	0,0	1,5	0,0	3,0	0,0
II	1,5	24,7	3,0	23,6	3,0	23,6	1,5	24,7	3,0	23,6
III	1,5	20,9	3,0	19,8	3,0	19,8	1,5	20,9	3,0	19,8
IV	1,5	19,3	3,0	16,3	3,0	18,4	1,5	19,3	3,0	18,4
V	1,5	16,7	3,0	14,1	3,0	15,9	1,5	16,7	3,0	15,9

II. Numerické řešení metodou konečných prvků :

Jako výpočetní model pro metodu konečných prvků byl zvolen patrový výsek konstrukce. Tento model zohledňuje vliv tuhosti svislých nosných konstrukcí nad i pod vyšetřovanou rovinou.

Výpočetní model konstrukce :



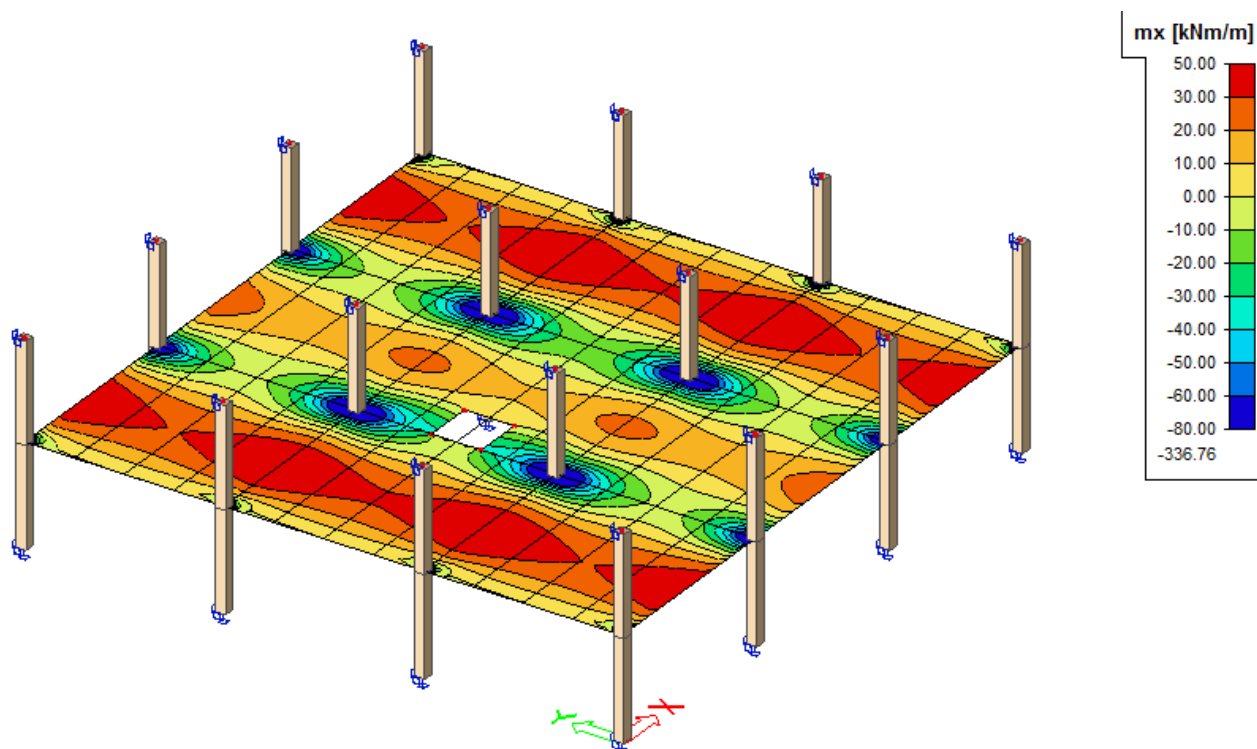
Postup :

- 1) vytvoření prostorového modelu konstrukce - patrový výsek
- 2) numerický výpočet - lineární výpočet
- 3) rozdělení konstrukce na průměrovací pásy - pásy kopírují rozdělení na sloupové a střední pruhy, užívané ve zjednodušených metodách
- 4) definování řezů na konstrukci - každým průměrovacím pásem proložený jeden řez
- 5) vykreslení ohybových momentů na řezu - představují rovnoměrné rozdělení momentu po šířce pruhu

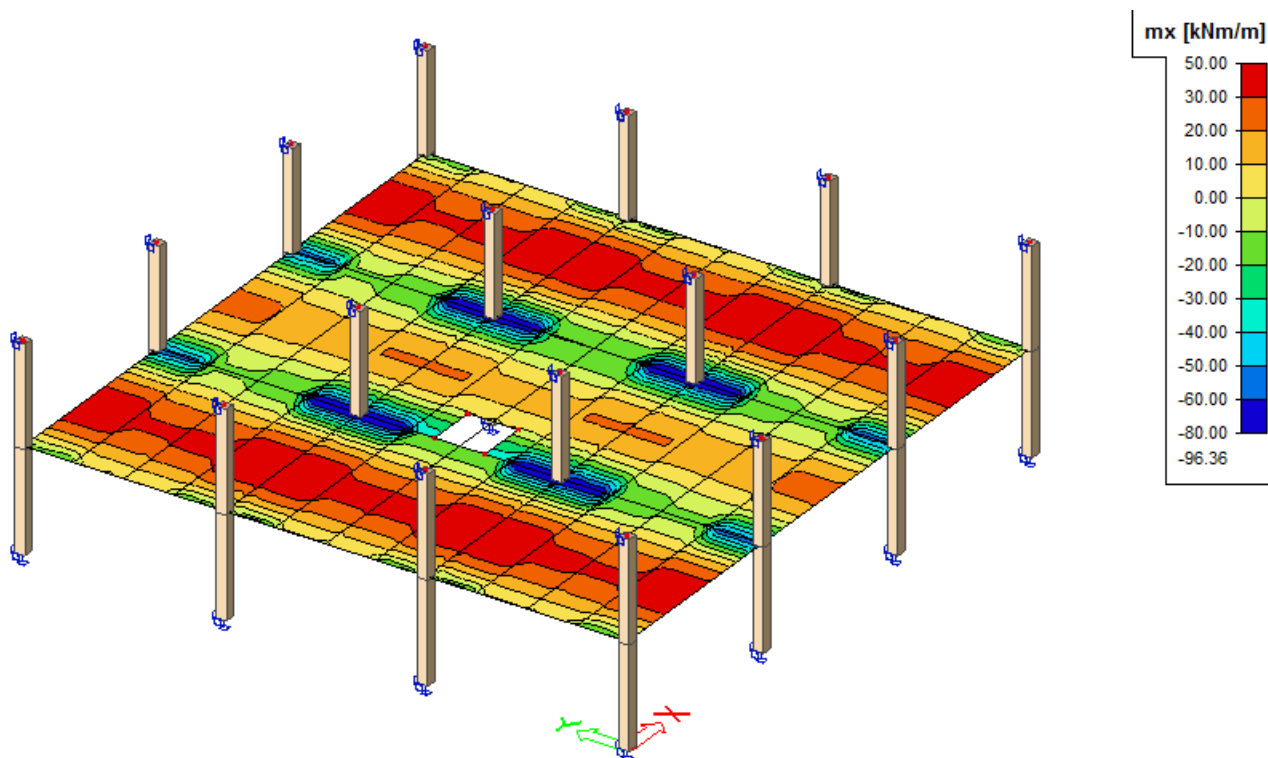
Výsledný průběh ohybových momentů na desce :

ohybové momenty ve směru osy m_x :

- bez redistribuce momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :

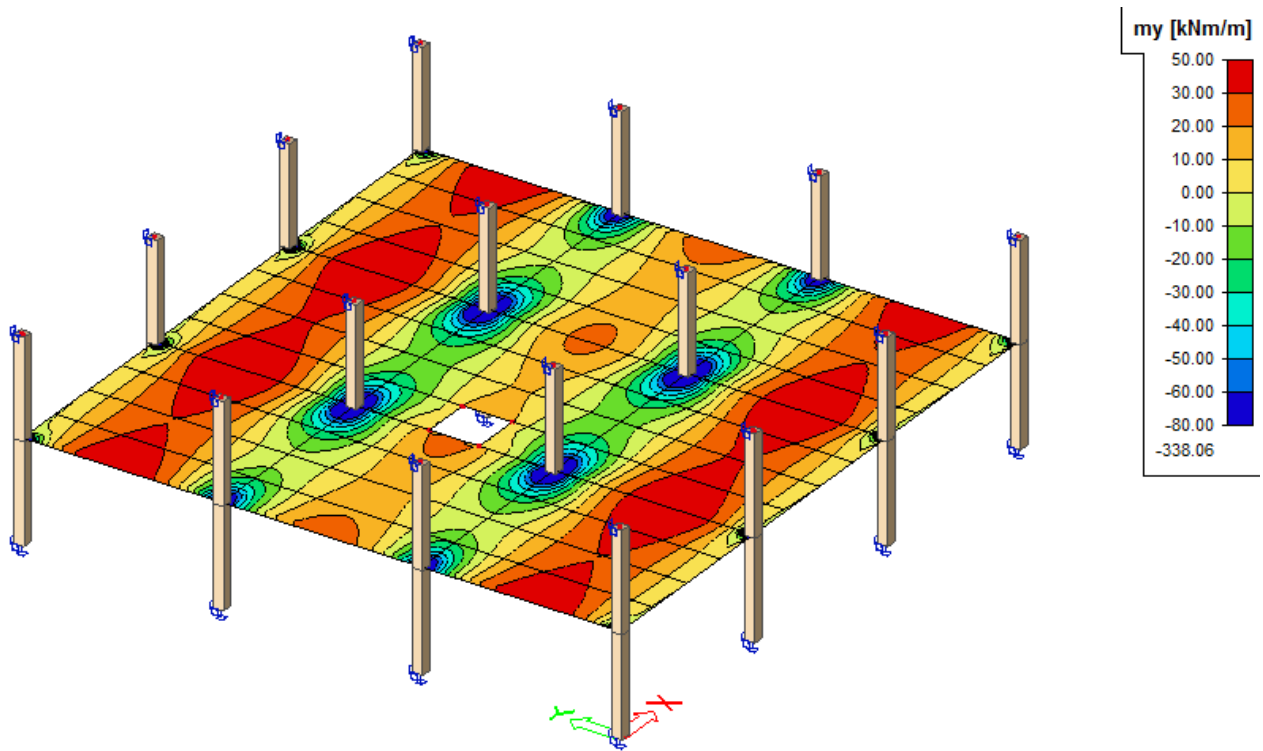


- s redistribucí momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :

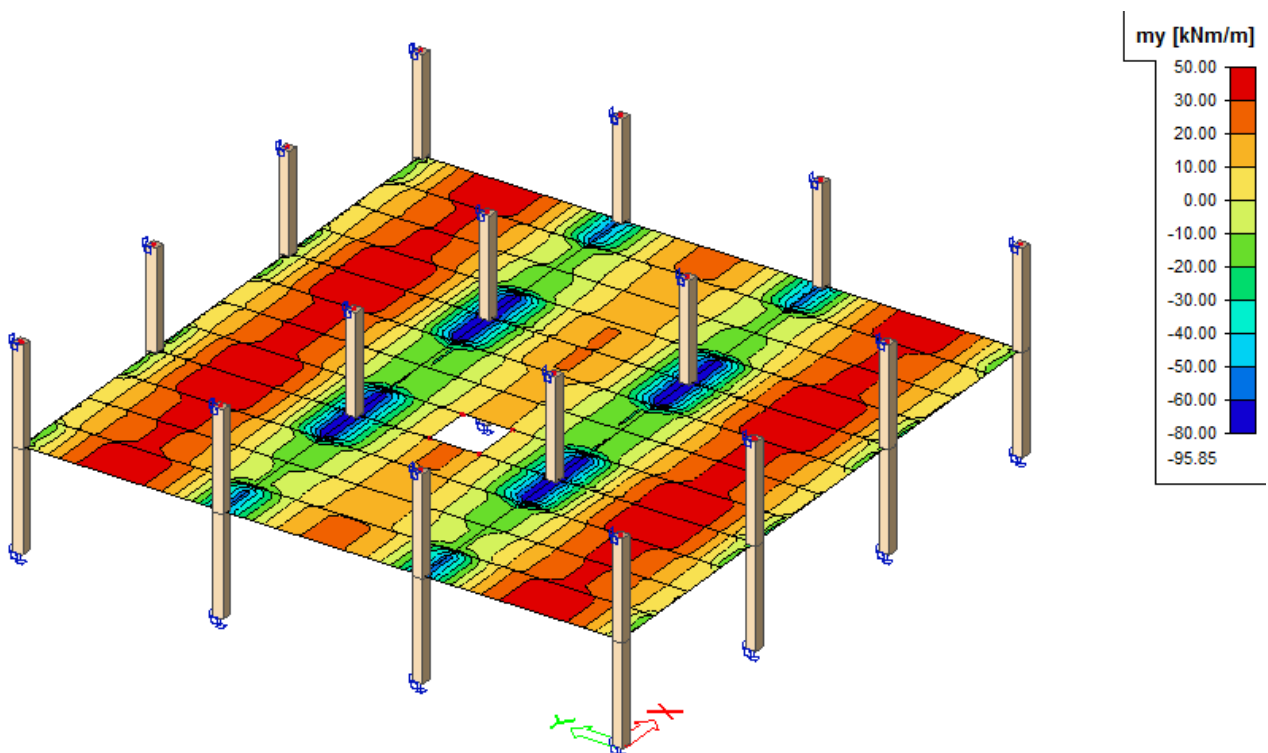


ohybové momenty ve směru osy m_y :

- bez redistribuce momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :



- s redistribucí momentů po šířce vyšetřovaných pruhů :



III. Srovnání výsledků řešení MSM a MKP :

Dimenzování - ohybová výztuž :

- $h_d = 240\text{mm}$, $c_d = 25\text{mm}$
- předpoklad vyztužení desky : $\varnothing_{d,x} = 12\text{ mm} \Rightarrow d_x = 240 - 25 - 6 = 209\text{ mm}$
 $\varnothing_{d,y} = 12\text{ mm} \Rightarrow d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\text{ mm}$

- minimální plocha výztuže :

$$a_{s,\min} = 0,0015 \cdot b \cdot d_x = 0,0015 \cdot 1000 \cdot 209 = 313,5\text{ mm}^2 / \text{m}$$

$$= 0,26 \cdot \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot d_x}{f_{yk}} = 0,26 \cdot \frac{2,6 \cdot 1000 \cdot 209}{500} = 282,6\text{ mm}^2 / \text{m}$$

$$= \frac{k_c \cdot k \cdot f_{ct,eff} \cdot A_{ct}}{\sigma_s} = \frac{0,4 \cdot 1,0 \cdot 2,6 \cdot 1000 \cdot 240 / 2}{500} = 249,6\text{ mm}^2 / \text{m}$$

$$\Rightarrow \text{konstrukční vyztužení : } 4 \times \varnothing 10\text{mm} \quad a_{s,\text{konst}} = 314\text{ mm}^2 \geq a_{s,\min}$$

Vyztužení pásu 1 : $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\text{ mm}$

pás 1		metoda součtových momentů			numerické řešení - MKP		
		m_{Ed} [kN.m/m']	NÁVRH	m_{Rd} [kN.m/m']	m_{Ed} [kN.m/m']	NÁVRH	m_{Rd} [kN.m/m']
I (H)	sloupový	28,3	5 x \varnothing 10	32,8	20,3	4 x \varnothing 10	26,3
	střední	0,0	4 x \varnothing 10	26,3	0,1	4 x \varnothing 10	26,3
II (D)	sloupový	33,8	6 x \varnothing 10	39,1	37,3	6 x \varnothing 10	39,1
	střední	24,7	4 x \varnothing 10	26,3	30,7	5 x \varnothing 10	32,8
III (H)	sloupový	56,8	7 x \varnothing 12	64,3	61,6	7 x \varnothing 12	64,3
	střední	20,9	4 x \varnothing 10	26,3	10,9	4 x \varnothing 10	26,3
IV (H)	sloupový	52,7	7 x \varnothing 12	64,3	56,4	7 x \varnothing 12	64,3
	střední	19,3	4 x \varnothing 10	26,3	11,1	4 x \varnothing 10	26,3
V (D)	sloupový	22,7	4 x \varnothing 10	26,3	22,8	4 x \varnothing 10	26,3
	střední	16,7	4 x \varnothing 10	26,3	15,2	4 x \varnothing 10	26,3

Vyztužení pásu 2 : $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197\text{ mm}$

pás 2		metoda součtových momentů			numerické řešení - MKP		
		m_{Ed} [kN.m/m']	NÁVRH	m_{Rd} [kN.m/m']	m_{Ed} [kN.m/m']	NÁVRH	m_{Rd} [kN.m/m']
I (H)	sloupový	29,5	5 x \varnothing 10	32,8	27,6	5 x \varnothing 10	32,8
	střední	0,0	4 x \varnothing 10	26,3	0,1	4 x \varnothing 10	26,3
II (D)	sloupový	35,3	6 x \varnothing 10	39,1	38,9	6 x \varnothing 10	39,1
	střední	23,6	4 x \varnothing 10	26,3	32,1	5 x \varnothing 10	32,8
III (H)	sloupový	59,5	7 x \varnothing 12	64,3	83,1	10 x \varnothing 12	89,6
	střední	19,8	4 x \varnothing 10	26,3	20,1	4 x \varnothing 10	26,3
IV (H)	sloupový	48,9	7 x \varnothing 12	64,3	76,6	10 x \varnothing 12	89,6
	střední	16,3	4 x \varnothing 10	26,3	20,2	4 x \varnothing 10	26,3
V (D)	sloupový - otvor	42,1	7 x \varnothing 10	45,4	21,1	4 x \varnothing 10	26,3
	střední	14,1	4 x \varnothing 10	26,3	15,3	4 x \varnothing 10	26,3

Vyztužení pásu 3 : $d_y = 240 - 25 - 12 - 6 = 197 \text{ mm}$

pás 3		metoda součtových momentů			numerické řešení - MKP		
		m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}	m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}
		[kN.m/m']		[kN.m/m']	[kN.m/m']		[kN.m/m']
I (H)	sloupový	29,5	5 x ϕ 10	32,8	28,0	5 x ϕ 10	32,8
	střední	0,0	4 x ϕ 10	26,3	0,1	4 x ϕ 10	26,3
II (D)	sloupový	35,3	6 x ϕ 10	39,1	38,7	6 x ϕ 10	39,1
	střední	23,6	4 x ϕ 10	26,3	32,1	5 x ϕ 10	32,8
III (H)	sloupový	59,5	7 x ϕ 12	64,3	84,9	10 x ϕ 12	89,6
	střední	19,8	4 x ϕ 10	26,3	19,4	4 x ϕ 10	26,3
IV (H)	sloupový	55,2	7 x ϕ 12	64,3	79,5	10 x ϕ 12	89,6
	střední	18,4	4 x ϕ 10	26,3	19,2	4 x ϕ 10	26,3
V (D)	sloupový	23,8	4 x ϕ 10	26,3	20,4	4 x ϕ 10	26,3
	střední	15,9	4 x ϕ 10	26,3	15,2	4 x ϕ 10	26,3

Vyztužení pásu A : $d_x = 240 - 25 - 6 = 209 \text{ mm}$

pás A		metoda součtových momentů			numerické řešení - MKP		
		m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}	m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}
		[kN.m/m']		[kN.m/m']	[kN.m/m']		[kN.m/m']
I (H)	sloupový	28,3	5 x ϕ 10	34,8	20,3	4 x ϕ 10	28,0
	střední	0,0	4 x ϕ 10	28,0	0,1	4 x ϕ 10	28,0
II (D)	sloupový	33,8	5 x ϕ 10	34,8	37,3	6 x ϕ 10	41,6
	střední	24,7	4 x ϕ 10	28,0	30,7	5 x ϕ 10	34,8
III (H)	sloupový	56,8	6 x ϕ 12	59,1	60,7	7 x ϕ 12	68,4
	střední	20,9	4 x ϕ 10	28,0	11,2	4 x ϕ 10	28,0
IV (H)	sloupový	52,7	6 x ϕ 12	59,1	56,7	7 x ϕ 12	68,4
	střední	19,3	4 x ϕ 10	28,0	11,1	4 x ϕ 10	28,0
V (D)	sloupový	22,7	4 x ϕ 10	28,0	22,8	4 x ϕ 10	28,0
	střední	16,7	4 x ϕ 10	28,0	15,1	4 x ϕ 10	28,0

Vyztužení pásu B : $d_x = 240 - 25 - 6 = 209 \text{ mm}$

pás B		metoda součtových momentů			numerické řešení - MKP		
		m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}	m_{Ed}	NÁVRH	m_{Rd}
		[kN.m/m']		[kN.m/m']	[kN.m/m']		[kN.m/m']
I (H)	sloupový	29,5	5 x ϕ 10	34,8	27,6	4 x ϕ 10	28,0
	střední	0,0	4 x ϕ 10	28,0	0,1	4 x ϕ 10	28,0
II (D)	sloupový	35,3	6 x ϕ 10	41,6	39,0	6 x ϕ 10	41,6
	střední	23,6	4 x ϕ 10	28,0	32,4	5 x ϕ 10	34,8
III (H)	sloupový	59,5	7 x ϕ 12	68,4	79,7	9 x ϕ 12	86,6
	střední	19,8	4 x ϕ 10	28,0	17,1	4 x ϕ 10	28,0
IV (H)	sloupový	52,1	7 x ϕ 12	68,4	75,4	9 x ϕ 12	86,6
	střední	18,4	4 x ϕ 10	28,0	15,2	4 x ϕ 10	28,0
	střední - otvor	36,8	6 x ϕ 10	41,6	35,1	6 x ϕ 10	41,6
V (D)	sloupový	22,4	4 x ϕ 10	28,0	20,4	4 x ϕ 10	28,0
	střední	15,9	4 x ϕ 10	28,0	15,1	4 x ϕ 10	28,0

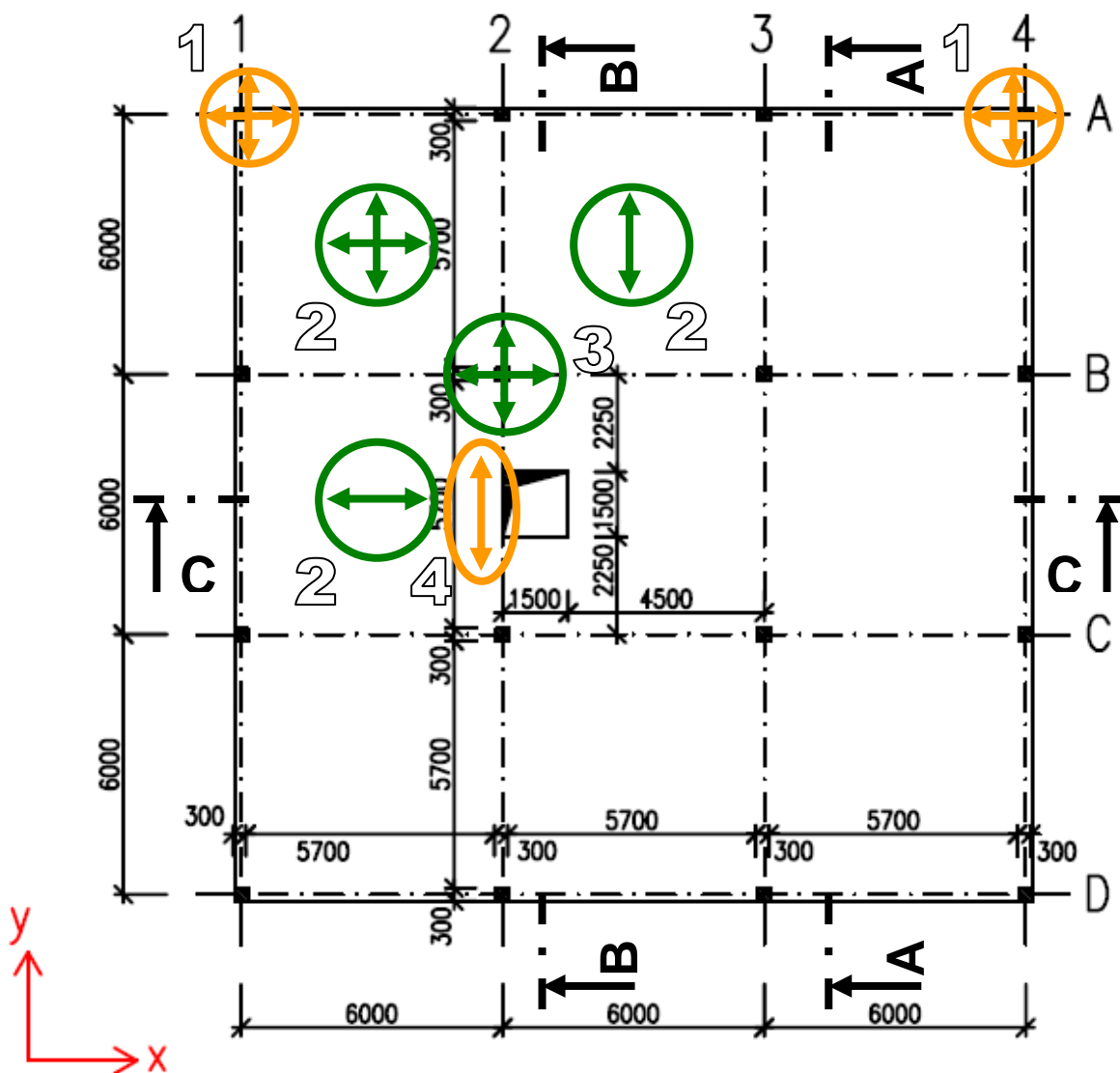
- větší hodnoty v případě MKP
- větší hodnoty v případě metody součtových momentů

Vyhodnocení :

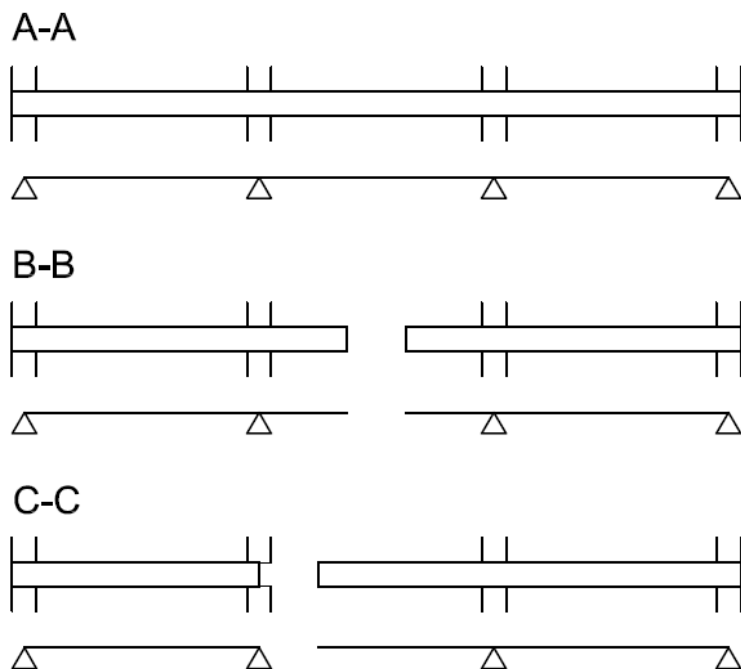
Dle normy ČSN 73 1204, resp. ČSN 73 1201 nesmí být v oblasti deskové konstrukce společně křížujícím se pruhu sloupovému a střednímu prostupem přerušen pás širší než 1/4 šířky příslušného pruhu v každém směru a výztuž přerušená prostupy se musí nahradit přidanou výztuží uloženou po stranách prostupu.

V tomto případě umístěný prostup přerušuje 50% sloupového pruhu, čímž nesplňuje výše uvedenou podmínku. Za účelem odhalení důsledků této skutečnosti byla provedena srovnávací studie výpočtu metodou součtových momentů (MSM) a metodou konečných prvků (MKP).

Při srovnání výsledků obou metod byla vytipována kritická místa konstrukce a v nich analyzovány odchylky řešení. Je nutné upozornit, že výpočet metodou součtových momentů se řídil výhradně postupem používaným pro plné desky neoslabené otvorem. Odhalené rozdíly mezi oběma metodami by bylo možné snížit za předpokladu, že by bylo zohledněno změněné statické schéma konstrukce.

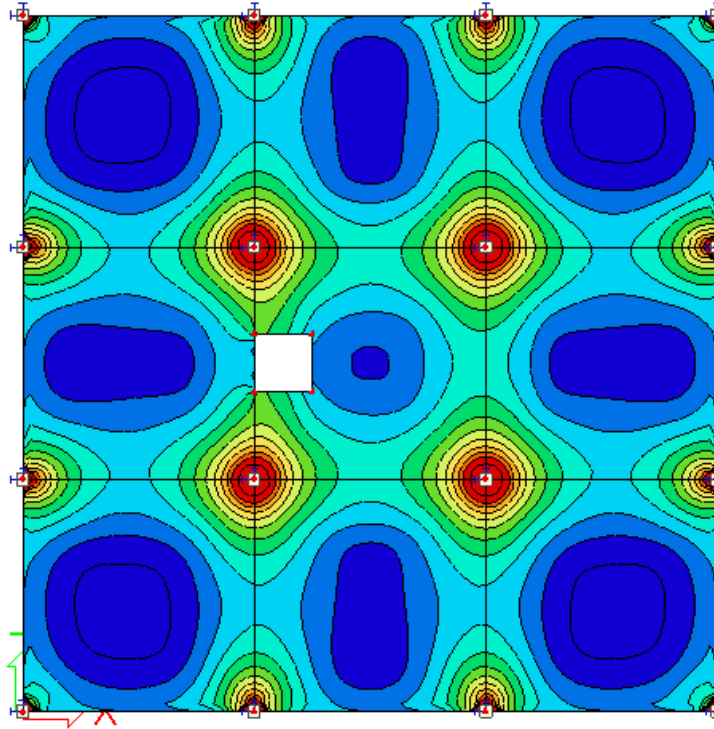


- **okraj desky** : MSM nadhodnocuje momenty ve sloupových pruzích nad rohovými sloupy, což vede k jejich převyztužení. Ostatní okrajové momenty v pruzích kolmých na volný okraj jsou u obou metod řešení relativně stejné. Stejně tak momenty okrajových pruhů, rovnoběžné s okrajem. 1
- **střední pruhy uprostřed krajních polí** : Vlivem umístění prostupu ve středním deskovém poli dochází k odlehčení tohoto pole a větší deformaci polí sousedních. Současně dochází ke změně statického schématu v řezech sloupovým (řez B-B) a středním pruhem (řez C-C), kdy se spojitý nosník mění v dvojici prostých nosníků (s případným převislým koncem). Tato fakta však výpočet pomocí MSM nezohledňuje, a proto predikuje menší namáhání středních pruhů krajních polí, než odpovídá skutečnosti (potvrzeno MKP). S rostoucí velikostí otvoru se tento rozdíl zvětšuje. To je také jeden z důvodů, proč norma omezuje velikost prostupů přípustných pro výpočet pomocí MSM. Dalším důvodem je patrná změna statického působení desky v okolí prostupu. 2



Řezy deskou a jejich statická schémata

- **vnitřní sloup** : I při redistribuci momentů po šířce pruhu vychází při MKP ve sloupových pruzích přiléhajících vnitřním sloupům větší podporové momenty a tím i dimenze. Částečným důvodem je fakt, že metoda součtových momentů uvažuje moment v rovině líce sloupu v celé šířce pruhu, zatímco MKP zohledňuje momenty v okolí sloupu v rovině procházející spojnici sloupů. Na rozdíl od případu, kdy je otvor umístěn uprostřed středního pole (příklad 3), je však při tomto porovnání výsledků s příkladem 2 (obecná lokálně podepřená konstrukce) procentuální rozdíl mezi hodnotami MSM a MKP výraznější. Důvodem je umístění prostupu do sloupového pruhu, tedy oblasti toku hlavních napětí. V okolí prostupu dochází k odklonu trajektorií napětí od ideálního směru a vytvoření nového statického schématu. 3
- **okolí prostupu** : Dle filosofie MSM lze předpokládat, že část pruhu přerušenu prostupem musí být nahrazena zbývající částí pruhu, tedy namáhání této oblasti bude úměrné míře narušení konstrukce prostupem. Výpočet pomocí MKP však tento předpoklad vyvrací - namáhání sloupového pruhu přilehlého k prostupu je při použití MKP o více než 50% menší, než při použití MSM. V okolí prostupu dochází ke změně statického roznášení a redistribuci vnitřních sil do únosnějších částí desky. Zvětšují se momenty nad podporami, část zatížení je roznášena ve směru kolmém na volný okraj prostupu. Tato skutečnost by měla být zohledněna při případném ručním výpočtu. 4



Odklon trajektorií napětí vlivem umístění prostupu

Závěr :

V případě jednoduché a pravidelné konstrukce dosahují obě metody srovnatelných výsledků. V případě umístění prostupu do sloupového pruhu desky závisí odchylky řešení na velikosti prostupu a jeho přesné lokalizaci. S rostoucí velikostí prostupu se mění statické schéma konstrukce a výsledky řešení pomocí MSM se odchyľují od skutečného chování konstrukce. Při srovnání s příkladem 3 (prostup ve středním pruhu) bylo prokázáno, že umístění prostupu do sloupového pruhu má výraznější dopady na chování lokálně podepřené konstrukce. Pokud by řešitel chtěl zjednodušenou metodu řešení použít i v případě nesplnění podmínek týkajících se velikosti a polohy prostupů, musí při výpočtu zohlednit výše uvedené skutečnosti.

Poděkování :

Tato srovnávací studie byla zpracována za finanční podpory projektu FRVŠ 905/2011/G1.