

2. Základy teorie boulení

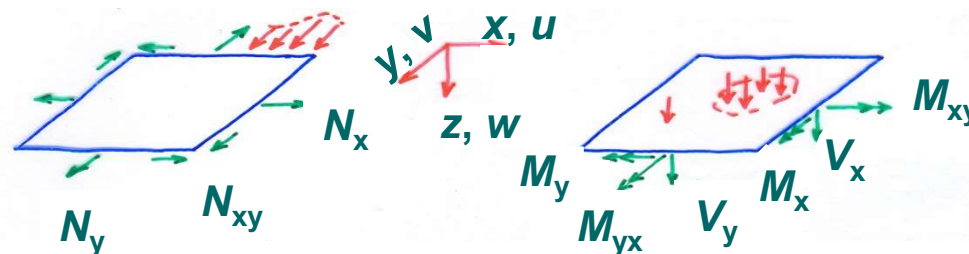
Plošné prvky:

stěna

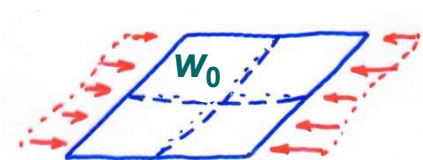
(George Biddell Airy, 1862)

deska

(Marie-Sophie Germain, 1816)



Deska s "velkými průhyby": (k řešení stability a boulení stěn)

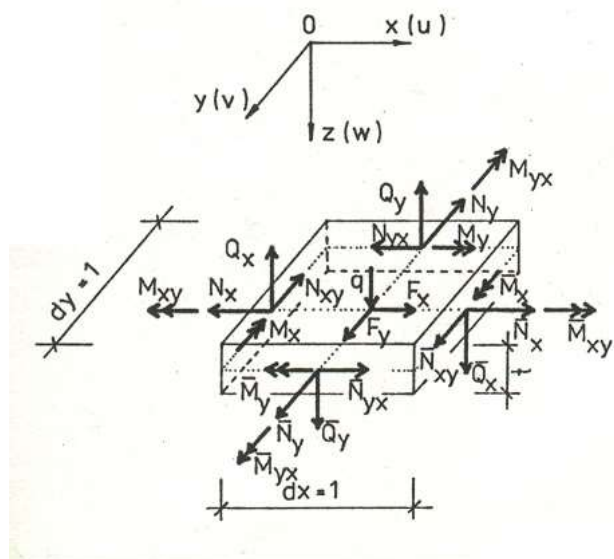


stěnové účinky: N_x, N_y, N_{xy}

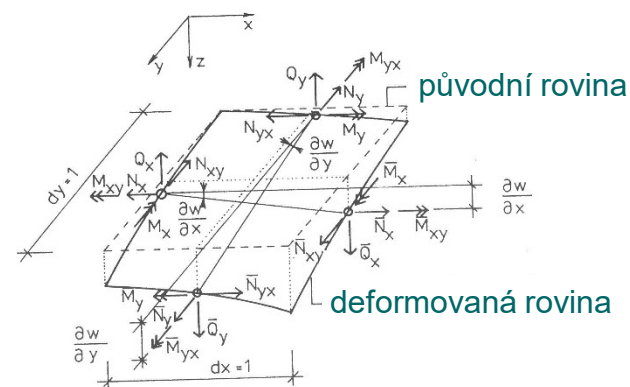
deskové účinky: $M_x, M_y, M_{xy} \quad (V_x, V_y)$

Základní rovnice na deformované desce

1. Statické rovnice



$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \\ \bar{N}_y &= N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \\ \bar{N}_{xy} &= N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \\ \bar{M}_x &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \\ \bar{M}_y &= M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \\ \bar{M}_{xy} &= M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \\ \bar{Q}_x &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \\ \bar{Q}_y &= Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\xrightarrow{x} \quad & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x = 0 \\ \swarrow y \quad & \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + F_y = 0\end{aligned}$$

$z \downarrow x \wedge y \wedge$

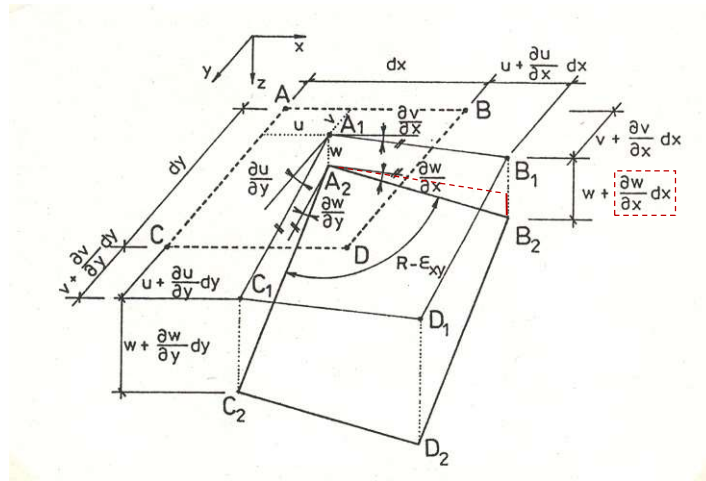
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q +$$

a celkový průhyb:

$$w_c = w + w_0$$

$$N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + 2 N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0$$

2. Geometrické rovnice



pro $w = w_c - w_0$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (\text{"velké"})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\varphi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varphi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \varphi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{"malé"})$$

Pozn. k odvození těchto vztahů:

- po deformaci z roviny

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

dosadit $w_c = w + w_0$

- pro skutečný průhyb $w = w_c - w_0$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_c}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 = \dots \rightarrow \text{viz výše}$$

3. Fyzikální rovnice

a) Pružné řešení (obecný Hookův zákon)

$$\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T = [C_{el}] \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}^T = [C_{el}] \{\varepsilon\}$$

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = [D_{el}] \{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xy}\}^T = [D_{el}] \{\varphi\}$$

$$[C_{el}] = \begin{bmatrix} C_x & C_1 & 0 \\ C_1' & C_y & 0 \\ 0 & 0 & C_{xy} \end{bmatrix} \quad [D_{el}] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1' & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$$

Isotropní:

$$C_x = C_y = \frac{C_1}{\nu} = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2} \quad C_{xy} = \frac{E \cdot t}{2(1 + \nu)} \quad D_x = D_y = \frac{D_1}{\nu} = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad D_{xy} = \frac{E \cdot t^3}{12(1 + \nu)}$$

Pro zobecnělé vnitřní síly F

a zobecnělé deformace e :

$$\{F\} = \{N, M\}^T \quad \{e\} = \{\varepsilon, \varphi\}^T \quad \{F\} = [Q_{el}] \cdot \{e\}$$

$$[Q_{el}] = \begin{bmatrix} [C_{el}] & [0] \\ [0] & [D_{el}] \end{bmatrix}$$

"pružná modulární matice" 6x6

b) Pružnoplastické řešení  deformační metoda (již se nepoužívá),
přírůstková metoda (převládá):

$$\{\Delta F\} = [Q] \cdot \{\Delta e\}$$

 "tangentová" (pružnoplastická) modulární matice

Přírůstky musí být malé, jinak narůstá chyba.

Úprava rovnic

Saint Venant (1883) - statické rovnice

von Karman (1910) - simultánní rovnice s Airyho funkcí

Marguerre (1937) - zavedl w_0

$$1) \quad D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - Et \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q$$

pro boulení
bez příčného
zatížení ($q=0$)

$$2) \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

kde: $N_x = Et \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad N_y = Et \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -Et \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

Lineární teorie boulení

Předpoklady (pro $q = 0$):

- ideální stěna $\Rightarrow w_0 = 0$
- průhyby jsou "malé,, $\Rightarrow$ Karmánovy rovnice lze linearizovat
- vnitřní membránové síly = zatížení (označeno N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*)

→ rozpadnou se na problém:

- rovinný
- prostorový

➡ rovinný problém neobsahuje vnější zatížení, Airyho funkce je identicky rovna 0

Tzn. řeší se pouze:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

+ příslušné okrajové podmínky

[Řešení může být diferenciální (v uzavřeném tvaru), nebo energetické (Ritzova metoda)]

Odtud plyne nekonečně mnoho řešení:

kritická napětí N^* (resp. $\sigma_{cr} = N^*/t$)
(důležité je to nejnižší)

příslušné tvary průhybu w
(tvary boulení)

Výsledky

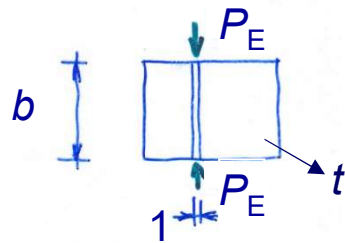
Kritická napětí ve tvaru:

$$\sigma_{cr} = k_{\sigma} \cdot \sigma_E \quad \text{resp.} \quad \tau_{cr} = k_{\tau} \cdot \sigma_E$$



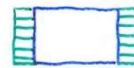
součinitel kritického napětí

"Eulerovo napětí,, σ_E (je to pomocná hodnota):

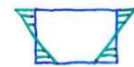


$$\sigma_E = \frac{P_E}{1 \cdot t} = \frac{\pi^2 D}{1 \cdot t \cdot b^2} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 = 189800 \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

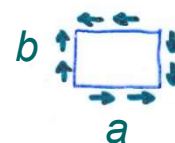
Součinitel kritického napětí:
(podle zatížení a uložení - literatura)



$$k = 4$$



$$k = 23,9$$

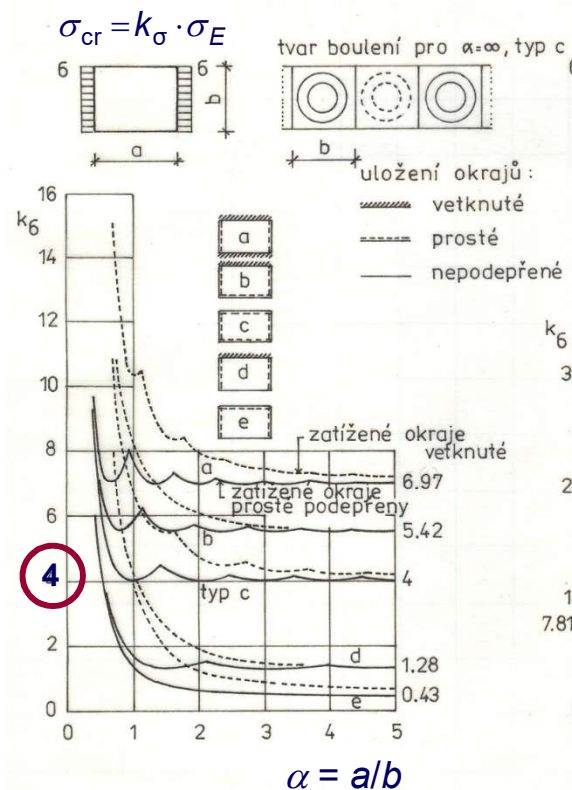


$$k = 5,34 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \quad \text{pro} \quad \frac{a}{b} \geq 1$$

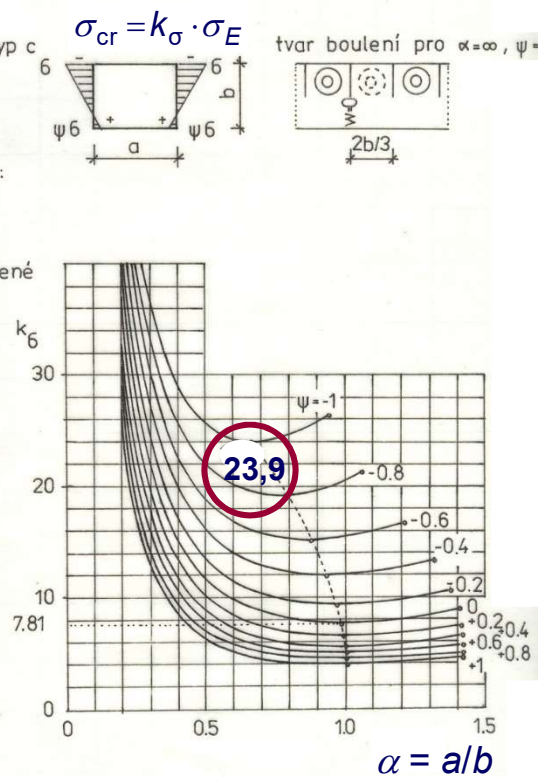
Stabilita stěn

Součinitele kritických napětí (bohatá literatura – např. Březina)

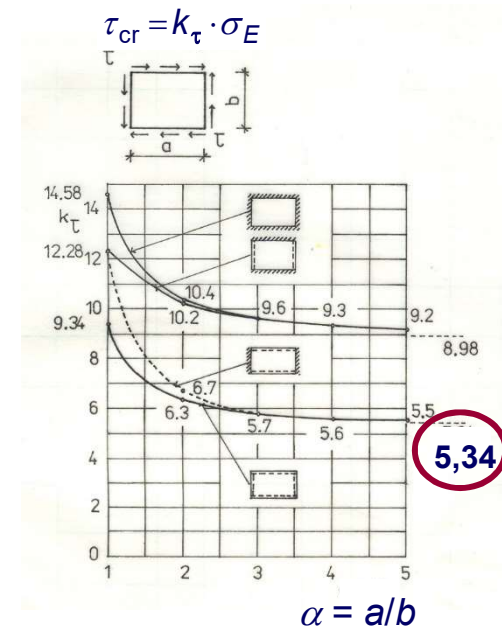
Tlačená stěna



Ohýbaná stěna



Smyk

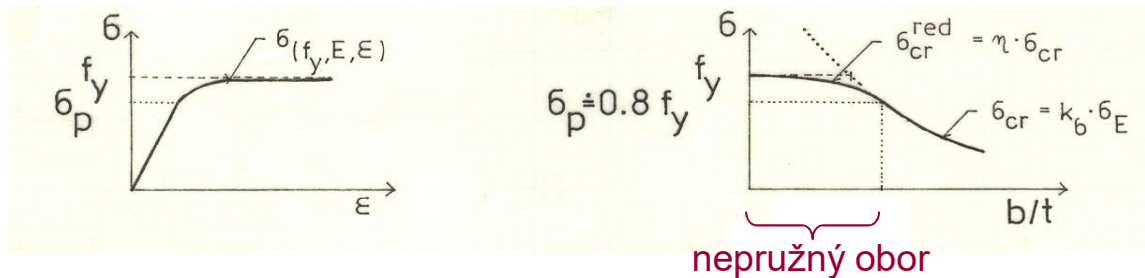


Kritická napětí v nepružném oboru (dnes nemá praktický význam)

Zaveden pracovní diagram

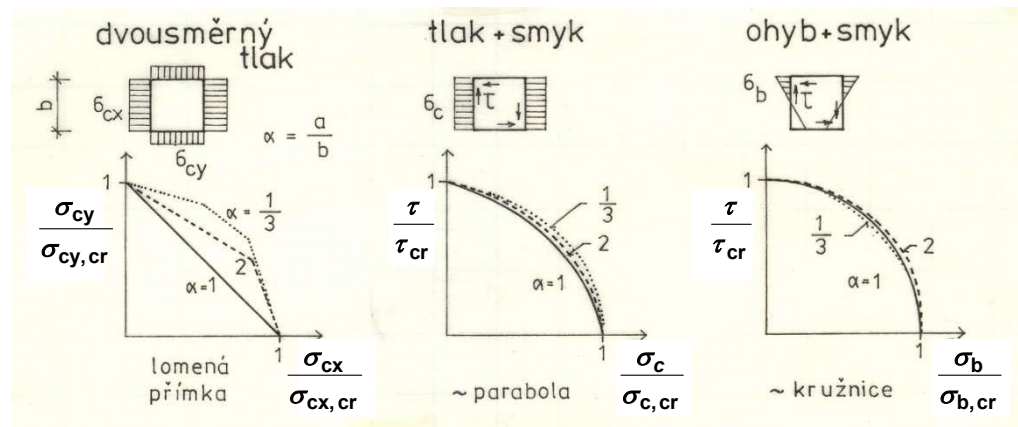
odtud:

Pro η teorie podle:



- Iljušina
- Stowella

Kombinace namáhání



Poměr $\sigma_c/\sigma_b/\tau$ se uvažuje proporcionální až do kritické hodnoty. Hodnoty ve jmenovateli jsou stanoveny pro tuto jedinou složku namáhání.

Přibližný Stüssiho vzorec:

$$\left[\left(\frac{\sigma_{cx}}{\sigma_{cx,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cy}}{\sigma_{cy,cr}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{b,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = 1$$

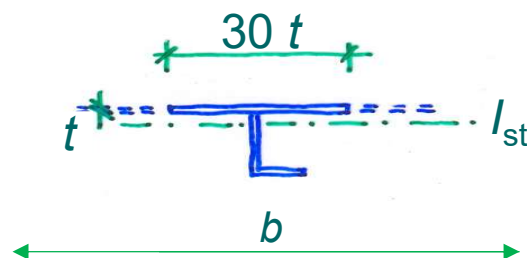
Stabilita stěn

Vyztužené stěny



Tuhost výztuhy

Používá se hodnota γ , jako poměr mezi tuhostí „účinné výztuhy“ a „účinného“ samotného plechu:



$$\gamma = \frac{E I_{st}}{D \cdot b} = \frac{I_{st}}{0,1 b t^3}$$

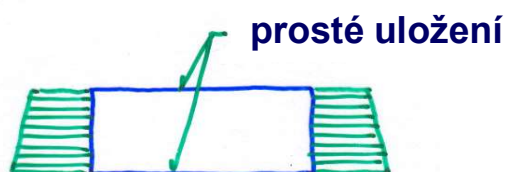
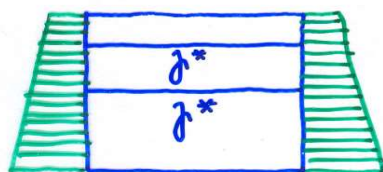
šířka plechu bez výztuhy

$$\text{kde } D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Optimální tuhost výztuh:

- prvního, druhého a třetího druhu (podrobnosti lze nalézt na webu)

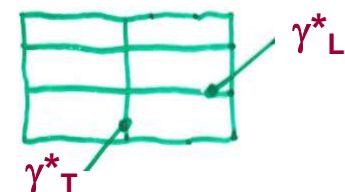
Obecně lze vždy stanovit optimální tuhost výztuh γ^* :



je to tuhost výztuhy γ , při níž platí:

σ_{cr} celé vyztužené stěny = σ_{cr} rozhodujícího samostatného pole

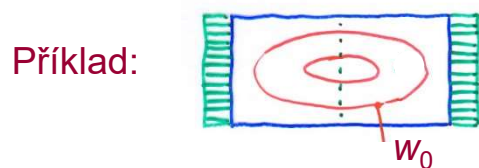
γ^* ... tabulky, vzorce pro nejrůznější uspořádání výztuh (Klöppel, Březina)



mezi uzavřenými výztuhami je stěna pružně vetknuta (větší k , vede k menšímu γ^* , podle studií redukce asi 60%)

Přeskoky při boulení

- vznikají po zatížení při nevhodném počátečním tvaru:

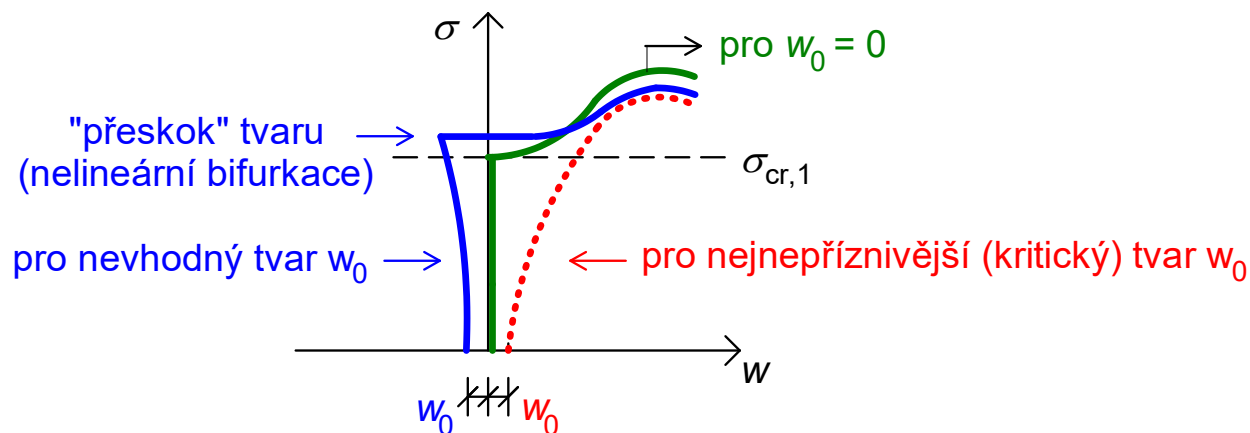


ale kritický tvar w_0 (při dosažení σ_{cr})



boulení při nevhodném tvaru w_0

boulení při kritickém tvaru w_0



⇒ přeskok může nastat pouze pro $\sigma \geq \sigma_{cr}$ (zavedeno v normách pro MSP)