



ČVUT

ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Termomechanika

Přednášky

Vítězslav Vydra

Katedra fyziky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

Poslední aktualizace: 1. prosince 2022

Přístupné online:

<http://people.fsv.cvut.cz/~vydra/fyzb.html#literatura>

Sbírka úloh:

<https://uloz.to!/ge2dcy42/fyzika-10-priklady-rndr-jaroslava-drchalova-csc-rar>

Materiál obsahuje některé převzaté, neautorizované a necitované obrázky, grafy a texty a je proto určen výhradně pro **vnitřní** potřebu přednášejícího a jeho studentů!

Většina použitých obrázků byla původně pod licenci
Creative Commons

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.cs>.

Plán přednášek

Základy termodynamiky

- systém, proces, stav, stavové rovnice
- 1. věta termodynamická, měrná tepelná kapacita

Šíření tepla

- vedení tepla, sálání, proudění
- Newtonův zákon ochlazování

Šíření hmoty

difúze vodní páry

Bonus – základy technické typografie

Písmo, veličiny, jednotky

Plán přednášek

Základy termodynamiky

- systém, proces, stav, stavové rovnice
- 1. věta termodynamická, měrná tepelná kapacita

Šíření tepla

- vedení tepla, sálání, proudění
- Newtonův zákon ochlazování

Šíření hmoty

difúze vodní páry

Bonus – základy technické typografie

Písmo, veličiny, jednotky

Plán přednášek

Základy termodynamiky

- systém, proces, stav, stavové rovnice
- 1. věta termodynamická, měrná tepelná kapacita

Šíření tepla

- vedení tepla, sálání, proudění
- Newtonův zákon ochlazování

Šíření hmoty

difúze vodní páry

Bonus – základy technické typografie

Písmo, veličiny, jednotky

Plán přednášek

Základy termodynamiky

- systém, proces, stav, stavové rovnice
- 1. věta termodynamická, měrná tepelná kapacita

Šíření tepla

- vedení tepla, sálání, proudění
- Newtonův zákon ochlazování

Šíření hmoty

difúze vodní páry

Bonus – základy technické typografie

Písmo, veličiny, jednotky

Termodynamický systém

Systém:

- **ohraničený** prostor vyplněný hmotou
 - vzduch v místnosti
 - stěna, budova
 - pára či spaliny v motoru
 - médium v potrubí
- dle průchodnosti hranic pro hmotu a teplo
 - **uzavřený** – hmota neprochází přes hranici (okna uzavřena)
 - **otevřený** – hmota prochází přes hranici (okna otevřena)
 - **izolovaný (adiabatický)** – teplo neprochází přes hranici
 - kvalitní izolace, roviny symetrie
 - je to relativní pojem - jde o to, aby výměna tepla s okolím byla nevýznamná ve srovnání s ději uvnitř

Stav systému

Stavové parametry

θ – teplota

p – tlak

V – objem

ρ – hustota

σ – napětí

l – délka

Stavové rovnice – popisují vztah mezi parametry

$$pV = nRT$$

– stavová rovnice ideálního plynu

$$\sigma = E\varepsilon|_{\theta=\text{konst.}}$$

– Hookův zákon

$$l = l_0 (1 + \alpha\theta)|_{\sigma=\text{konst.}}$$

– délková teplotní roztažnost

Stav systému

Stavové parametry

θ – teplota

p – tlak

V – objem

ρ – hustota

σ – napětí

l – délka

Stavové rovnice – popisují vztah mezi parametry

$$pV = nRT$$

– stavová rovnice ideálního plynu

$$\sigma = E\varepsilon|_{\theta=\text{konst.}}$$

– Hookův zákon

$$l = l_0 (1 + \alpha\theta)|_{\sigma=\text{konst.}}$$

– délková teplotní roztažnost

Stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = NE_k = Nk_B T = nN_A k_B T = nRT$$

- p – tlak plynu (Pa)
- V – objem plynu
- E_k – kinetická energie jedné molekuly plynu
- N – počet molekul plynu
- $n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}$ – látkové množství (mol)
 - kde μ je molární hmotnost plynu
- $R = N_A k_B = 8,314\,462\,618\text{ J K}^{-1}\text{ mol}^{-1}$ – universal gas constant
- $N_A k_B$ – Avogadrova a Boltzmannova konstanta

Příklad – tah v komíně (či v budově...)

Úloha

Určete podtlak u paty komína $h = 50$ m,

- teplota uvnitř komínu $\theta_i = 60$ °C,
- teplota vně komínu $\theta_e = -10$ °C

Řešení úlohy

Úlohu rozdělíme na dva systémy - vnější (e) a vnitřní (i)

- na vrcholu komína se oba systémy setkávají
⇒ je zde stejný tlak (p_0)
- rozdíl tlaků vně a uvnitř u paty komína je tedy dán pouze rozdílem hydrostatických tlaků
 - to je maximálně možný rozdíl - v situaci, kdy kouř neproudí

Tah v komíně – pokračování

- hydrostatický tlak u paty komína uvnitř: $p_i = p_0 + \rho_i gh$,
- hydrostatický tlak u paty komína vně: $p_e = p_0 + \rho_e gh$,
- rozdíl:

$$\Delta p = p_e - p_i = (\rho_e - \rho_i) gh$$

- hustotu ($\rho = \frac{m}{V}$) určíme ze stavové rovnice

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \implies p = \frac{\rho}{\mu} RT \text{ a tedy}$$

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}$$

- předpokládejme, že $\Delta p \ll p_0$ a $\mu_e \doteq \mu_i$, pak

- $\rho_i = \frac{p_0 \mu_e}{RT_i}$

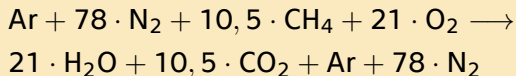
- $\rho_e = \frac{p_0 \mu_e}{RT_e}$

- tedy zřejmě $\rho_i \doteq \frac{p_0 \mu_e}{RT_i} = \rho_e \frac{T_e}{T_i}$

Tah v komíně – pokračování

Chemické intermezzo (jen pro fanoušky)

- vzduch lze vygúglit (vzduch = $\mu_e = 28,97$ g/mol)
- spaliny výpočtem – stechiometrické spaliny metanu



na pravé straně je celkem $21 + 10,5 + 1 + 78 = 110,5$ molu
a hmotnost je $21 \cdot 18 + 10,5 \cdot 44 + 40 + 78 \cdot 28 = 3064$

molární hmotnost $\mu_i = \frac{3064}{110,5} = 27,7$ g/mol

- tedy zřejmě $\mu_e \doteq \mu_i$ (chyba je asi 3 %)
- $\rho_i \doteq \frac{p_0 \mu_e}{RT} = \rho_e \frac{T_e}{T_i}$

Tah v komíně – pokračování

Finální výpočet

$$\blacksquare \Delta p = (\rho_e - \rho_i) gh = \left(\rho_e - \rho_e \frac{T_e}{T_i} \right) gh =$$
$$1,342 \cdot \left(1 - \frac{263,15}{333,15} \right) \cdot 9,81 \cdot 50 = 138 \text{ Pa}$$

- nebo přesněji s uvážením toho, že molární hmotnost kouře je nižší než vzduchu:

$$\blacksquare \Delta p = (\rho_e - \rho_i) gh = \frac{\rho_0 \mu_e gh}{R} \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_i} \right) =$$
$$\frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 9,81 \cdot 50}{8,31} \left(\frac{28,97}{263,15} - \frac{27,7}{333,15} \right) \cdot 10^{-3} = 161 \text{ Pa}$$

- chyba je tedy přibližně 12 %

Termodynamický proces

Proces = změna systému.

Proces je popsán změnou stavových parametrů!

Typy procesů

- izochorický ($V = \text{konst.}$)
- izotermický ($\theta = \text{konst.}$)
- izobarický ($p = \text{konst.}$)
- adiabatický ($dQ = 0$)
- relaxační – systém spěje do termodynamické rovnováhy

Relaxační proces

Termodynamická rovnováha

- Stav okolí systému se nemění
- Systém spěje do stavu rovnováhy s okolím
- Proces se nazývá **relaxační proces**
- Doba jak dlouho to trvá – **relaxační čas**

Relaxační čas – jak rychle teplé těleso vychladne

- záleží na
 - tepelné kapacitě (velikosti a měrné tepelné kapacitě)
 - tepelné vodivosti
- katedrála x špendlík
- teploměr – musí být v termodynamické rovnováze s okolím!

Relaxační proces

Termodynamická rovnováha

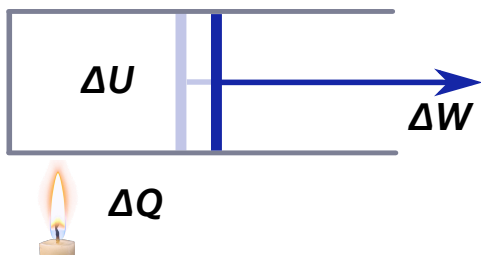
- Stav okolí systému se nemění
- Systém spěje do stavu rovnováhy s okolím
- Proces se nazývá **relaxační proces**
- Doba jak dlouho to trvá – **relaxační čas**

Relaxační čas – jak rychle teplé těleso vychladne

- záleží na
 - tepelné kapacitě (velikosti a měrné tepelné kapacitě)
 - tepelné vodivosti
- katedrála x špendlík
- teploměr – musí být v termodynamické rovnováze s okolím!

Bilance energie – výměna energie s okolím

Příklad – vzduch ve válci s pohyblivým pístem
(tepelný stroj – motor)



- ΔQ – teplo dodané do systému
- ΔU – změna vnitřní energie systému
- ΔW – práce vykonaná pohybem pístu

1. věta termodynamická

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

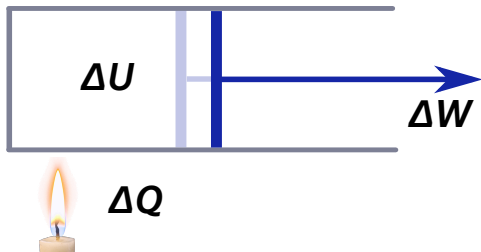
Smysl motoru

Přeměna tepla na práci!

$$\Delta Q \rightarrow \Delta W$$

Bilance energie – výměna energie s okolím

Příklad – vzduch ve válci s pohyblivým pístem
(tepelný stroj – motor)



1. věta termodynamická

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Smysl motoru

Přeměna tepla na práci!

$$\Delta Q \rightarrow \Delta W$$

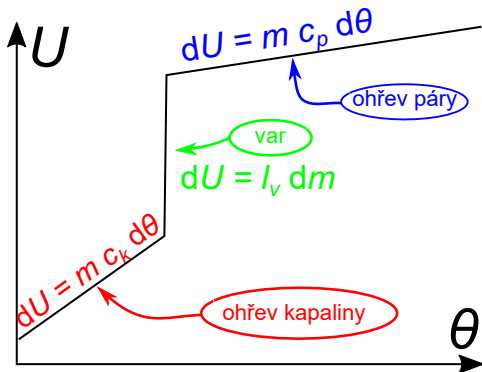
ΔQ – teplo dodané do systému

ΔU – změna vnitřní energie systému

ΔW – práce vykonaná pohybem pístu

Vnitřní energie U

je to míra souhrnné energie částic hmoty (atomů, molekul)



■ závisí na

- fázi hmoty
 $dU = I \cdot dm$
 (I je skupenské teplo)
- teplotě
 $dU = m \cdot c \cdot d\theta$
 (c je měrná tepelná kapacita)
- množství hmoty
 (otevřené systémy)

Měrná tepelná kapacita

Definice

■ *Množství tepla potřebné na ohřátí 1 kg hmoty o 1 °C*

■ $c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{d\theta}$

■ víme že $dQ = dU + dW$, tedy

■ $c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{d\theta} = \frac{1}{m} \left(\frac{dU}{d\theta} + \frac{dW}{d\theta} \right)$

Měrná tepelná kapacita záleží na procesu

c_v – měrná tepelná kapacita při konstantním objemu

- $c = \frac{1}{m} \frac{dQ}{d\theta} = \frac{1}{m} \left(\frac{dU}{d\theta} + \frac{dW}{d\theta} \right)$
- $dW = 0$ (izochorický děj!) pak
- $c_v = \frac{1}{m} \frac{dU}{d\theta} + 0$

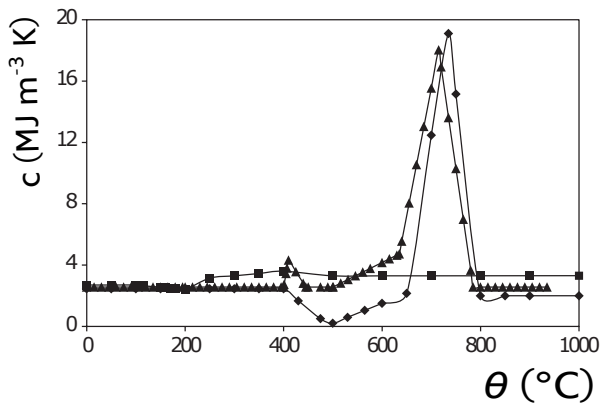
c_p – měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku

- při zahřívání se těleso obvykle zvětšuje, přitom koná práci $dW > 0$
- proto $c_p > c_v$

Měrná tepelná kapacita

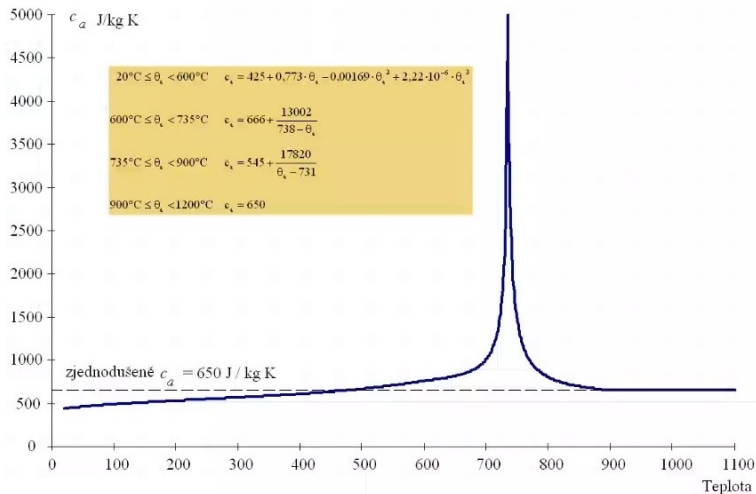
materiál	$\frac{c_p}{\text{kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}}$	$\frac{c_v}{\text{kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}}$	$\frac{c_p}{\text{kJ m}^{-3}\text{K}^{-1}}$
vzduch	1,005	0,718	1,285
argon	0,52	0,312	0,924
spaliny	1	?	?
vodní pára	1,97	1,5	?
beton	0,8	0,8	~2300
cihly	0,8	0,8	podle typu
voda	4,18	4,18	4200
ocel	0,45	0,45	3530
led	2,11	2,11	1940

Tepelná kapacita závisí na teplotě



Obrázek: Závislost kapacity betonu na teplotě. Zvýšení kapacity při teplotě nad 600 $^{\circ}\text{C}$ odpovídá endotermickému rozkladu vápencového kameniva.

Tepelná kapacita závisí na teplotě

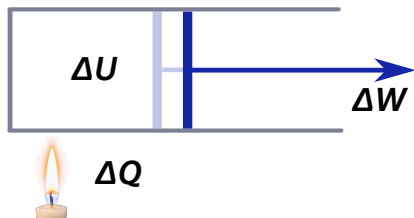


Obrázek: Měrná tepelná kapacita oceli. Převzato od ing. Z. Sokola

Tepelná kapacita závisí na teplotě

- V obou případech se jedná o fázovou změnu!
- Nejedná se tedy striktně vzato o tepelnou kapacitu!
- Ale o latentní teplo.

Opakování - bilance energie v systému



**1. věta termodynamická
(bilance energie)**

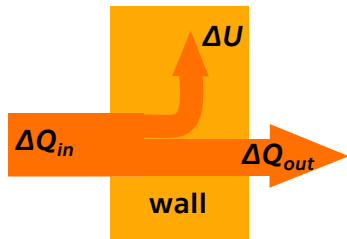
$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Energie se neztrácí (zákon zachování energie!),
energie dodaná do systému ve formě tepla (ΔQ) je

- 1 uložena ve formě **vnitřní energie** systému (ΔU)
- 2 použita na vykonání **práce** pohybem pístu (ΔW)

Balance energie při šíření tepla stěnou (v joulech)

Místo motoru vezmeme jiný systém – třeba **betonovou zed'**



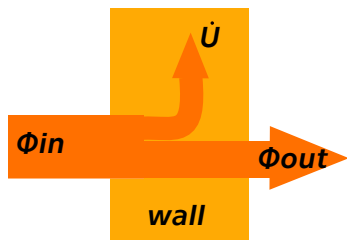
Balance energie

$$\Delta Q = \Delta Q_{in} - \Delta Q_{out} = \Delta U + 0 (!!)$$

- ΔQ_{in} – teplo co do stěny „vteče“
- ΔQ_{out} – teplo co na druhé straně „vyteče“
- ΔU – rozdíl zůstává v materiálu stěny ve formě vnitřní energie (roste teplota!)
- $\Delta W = 0$ (stěna nepracuje, nemá píst!)

Balance energie při šíření tepla stěnou (ve wattech)

Vše vyjádříme **za jednotku času** – získáme tepelné toky (ve watech)



Balance energie

$$\frac{d}{dt} (\Delta Q_{in} - \Delta Q_{out}) = \frac{d}{dt} (\Delta U + \Delta W)$$

$$\Phi_{in} - \Phi_{out} = \dot{U} + 0$$

- ΔQ je celkové dodané množství tepla (J)
- Φ je teplo, co vteče za jednotku času (tepelný tok)
- \dot{U} je změna vnitřní energie s časem

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \text{ (W)}$$

$$\dot{U} = \frac{dU}{dt} \text{ (W)}$$

Šíření tepla – toky tepla

- Φ – tepelný tok (W)
- q – hustota tepelného toku W m^{-2}

Bilance energie ve stěně

$$\Phi_{in} - \Phi_{out} = \dot{U} \text{ (co na druhé straně nevyteče, to ohřívá stěnu)}$$

Bilance energie ve stěně v ustáleném případě

$$\dot{U} = 0 \text{ (ustálený případ, nic se nemění s časem)} \Rightarrow$$

$$\Phi_{in} - \Phi_{out} = 0$$

$$\Phi_{in} = \Phi_{out} \text{ (co vteče, to na druhé straně vyteče)}$$

Stejná bilance platí i pro povrchy
(povrch nemůže akumulovat teplo)!

Mechanismy šíření tepla

Vedení

- 1D: stěna (homogenní + vícevrstvá)
- 2D: trubka (válcová symetrie)
- 3D: koule (sférická symetrie)

Záření

- přestup stěna – stěna

Proudění

- přestup místnost – stěna
- přestup stěna – stěna

Mechanismy šíření tepla

Vedení

- 1D: stěna (homogenní + vícevrstvá)
- 2D: trubka (válcová symetrie)
- 3D: koule (sférická symetrie)

Záření

- přestup stěna – stěna

Proudění

- přestup místnost – stěna
- přestup stěna – stěna

Mechanismy šíření tepla

Vedení

- 1D: stěna (homogenní + vícevrstvá)
- 2D: trubka (válcová symetrie)
- 3D: koule (sférická symetrie)

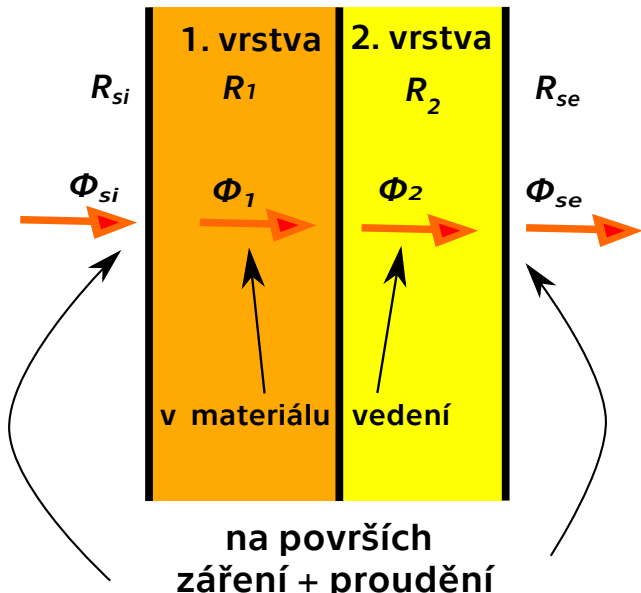
Záření

- přestup stěna – stěna

Proudění

- přestup místnost – stěna
- přestup stěna – stěna

Mechanismy šíření tepla - stěna



Šíření tepla vedením

- Vždy z teplejšího tělesa na chladnější
 - Mimochodem – které těleso je teplejší 🤔?
- Tělesa musí být v bezprostředním kontaktu

Princip: atomy si předávají kinetickou energii:

- prostřednictvím srážek (v plynech a kapalinách)
- prostřednictvím difúze elektronů (v kovech)
- prostřednictvím vibrací (v pevných látkách)

1D vedení (stěna) – ustálený stav

Fourierův zákon

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -S\lambda \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta x} = -S\lambda \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \text{ (W)}$$

θ_1, θ_2 – teploty **povrchů**

λ – součinitel tepelné vodivosti

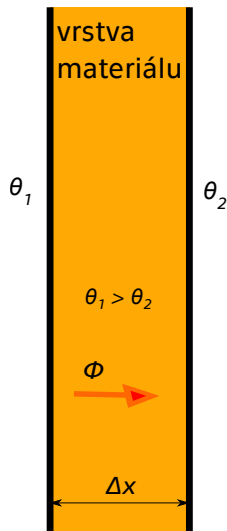
Fourierův zákon

jak ho píší stavaři

$$\Phi = -SU\Delta\theta = -S\frac{\Delta\theta}{R}$$

$U = \frac{\lambda}{\Delta x}$ – součinitel prostupu tepla

$R = \frac{\Delta x}{\lambda}$ (K m² W⁻¹) – tepelný odpor



1D vedení (stěna) – ustálený stav

Fouriérův zákon

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -S\lambda \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta x} = -S\lambda \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \text{ (W)}$$

θ_1, θ_2 – teploty **povrchů**

λ – součinitel tepelné vodivosti

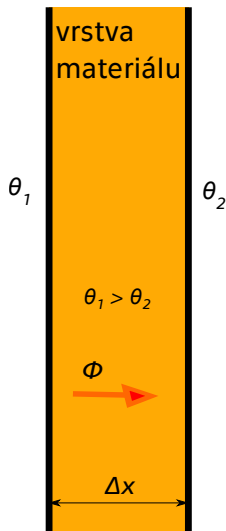
Fouriérův zákon

jak ho píší stavaři

$$\Phi = -SU\Delta\theta = -S\frac{\Delta\theta}{R}$$

$U = \frac{\lambda}{\Delta x}$ – součinitel prostupu tepla

$R = \frac{\Delta x}{\lambda}$ (K m² W⁻¹) – tepelný odpor



Diferenciální tvar Fourierova zákona

V limitě velmi tenké stěny ($\Delta x \rightarrow 0$):

Tepelný tok (heat flow rate) Φ

$$\Phi = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S \lambda \frac{\Delta \theta}{\Delta x} = -S \lambda \frac{d\theta}{dx} \text{ (W)}$$

V limitě malé plochy ($S \rightarrow 0$):

Hustota tepelného toku (heat flux) q

$$q = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{d\theta}{dx} \text{ (W m}^{-2}\text{)}$$

- Hustota tepelného toku je zavedena lokálně (v bodě)
 - může se měnit od místa k místu \Rightarrow 3D vedení tepla

Diferenciální tvar Fourierova zákona

V limitě velmi tenké stěny ($\Delta x \rightarrow 0$):

Tepelný tok (heat flow rate) Φ

$$\Phi = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S \lambda \frac{\Delta \theta}{\Delta x} = -S \lambda \frac{d\theta}{dx} \text{ (W)}$$

V limitě malé plochy ($S \rightarrow 0$):

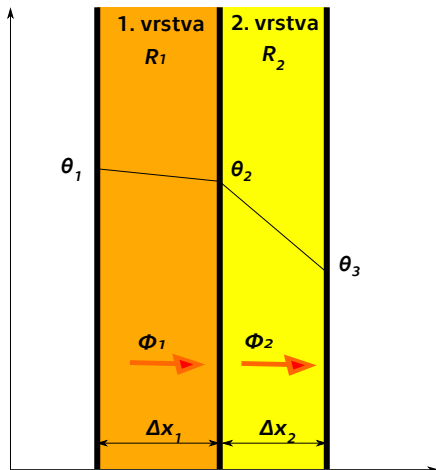
Hustota tepelného toku (heat flux) q

$$q = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Phi}{S} = -\lambda \frac{d\theta}{dx} \text{ (W m}^{-2}\text{)}$$

- Hustota tepelného toku je zavedena lokálně (v bodě)
 - může se měnit od místa k místu \Rightarrow 3D vedení tepla

Stěna z více vrstev, ustálený stav

Předpokládáme 1D vedení – žádné rohy ani tepelné mosty



Fouriérův zákon:

- 1. vrstva $\Phi_1 = S \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_1}$
- 2. vrstva $\Phi_2 = S \frac{\theta_2 - \theta_3}{R_2}$

Z rovnice kontinuity

- $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$

Stěna z více vrstev

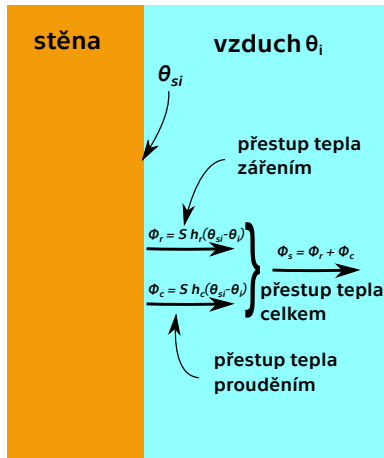
Vyřešením soustavy rcí z předchozí strany dostaneme:

$$\Phi = S \frac{\theta_1 - \theta_3}{R_1 + R_2}$$

a celkový odpor stěny:

$$R_T = R_1 + R_2$$

Přestup tepla z povrchu stěny do vzduchu



Na povrchu je teplo přenášeno

- zářením (Φ_r)
- prouděním vzduchu (Φ_c)

Oba toky sečteme

a získáme celkový tok tepla Φ_s
z povrchu do vzduchu

Přestup tepla na povrchu

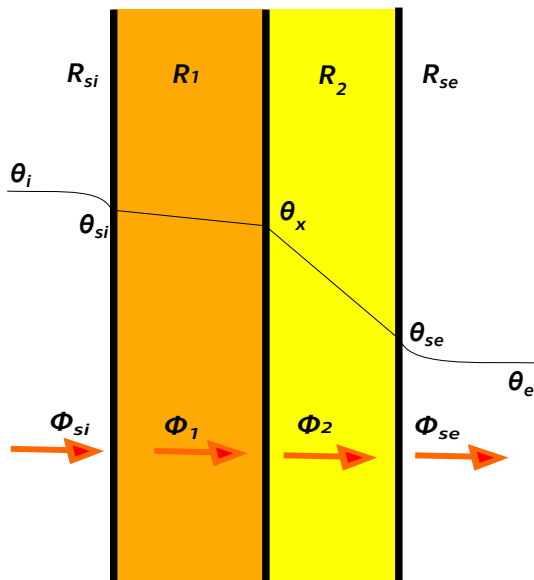
$$\Phi_s = \Phi_r + \Phi_c = S (h_r + h_c) (\theta_{si} - \theta_i)$$

$$\Phi_s = S h_s (\theta_{si} - \theta_i) = S \frac{(\theta_{si} - \theta_i)}{R_s}$$

h_s – součinitel přestupu tepla

R_s – odpor při přestupu tepla

Celkový odpor stěny R_T



Ustálený tepelný tok

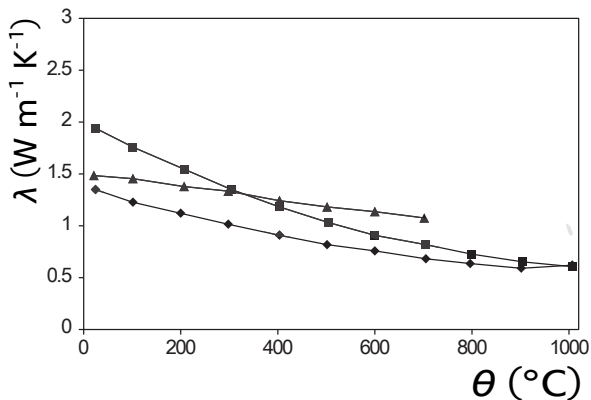
$$\Phi_{si} = \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{se} = \Phi$$

$$\Phi = S \frac{\theta_i - \theta_e}{R_{si} + R_1 + R_2 + R_{se}}$$

Celkový odpor stěny R_T

$$R_T = R_{si} + R_1 + R_2 + R_{se}$$

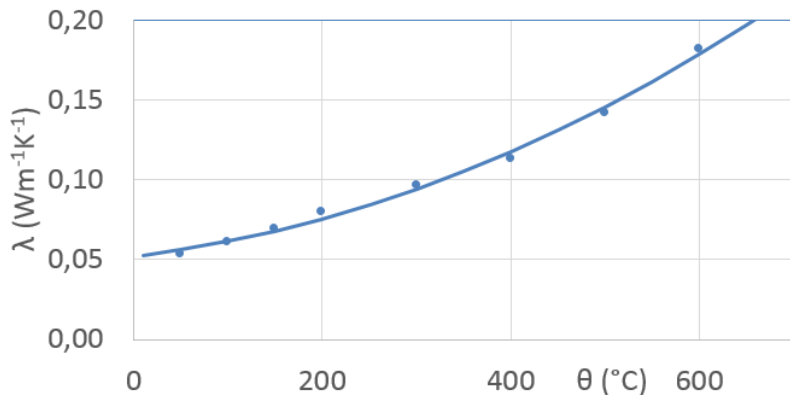
Co když součinitel tepelné vodivosti závisí na teplotě?



Obrázek: Závislost tepelné vodivosti betonu na teplotě

Co když součinitel tepelné vodivosti závisí na teplotě?

LMF 15 AluR



Výpočet tepelného odporu

Fourierův zákon má tvar: $q = -\lambda(\theta) \frac{d\theta}{dx}$ a protože

$q = \text{konst.}$ (ustálený stav), rovnici lze snadno zintegrovat:

$$\int_0^d q dx = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda(\theta) d\theta$$

Příklad pro $\lambda(\theta) = \lambda_0 + a \cdot \theta + b \cdot \theta^2$, kde λ_0, a, b jsou konstanty

$$q [x]_0^d = - \left[\lambda_0 \theta + a \frac{\theta^2}{2} + b \frac{\theta^3}{3} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$q \cdot d = - \left(\lambda_0 (\theta_2 - \theta_1) + a \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2} + b \frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3} \right)$$

$$q = - \frac{\lambda_0 (\theta_2 - \theta_1) + a \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2} + b \frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3}}{d} = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{R},$$

$$\text{odtud určíme odpor stěny: } R = \frac{(\theta_1 - \theta_2) \cdot d}{\lambda_0 (\theta_2 - \theta_1) + a \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{2} + b \frac{\theta_2^3 - \theta_1^3}{3}}$$

Co když součinitel tepelné vodivosti závisí na teplotě?

Příklad - tepelná izolace kotle

materiál: Knauf Insulation HTB 700,

$$\lambda_0 = 0,514, a = 7,7 \cdot 10^{-5}, b = 2,21 \cdot 10^{-7}$$

$$d = 5 \text{ cm}$$

1 horký kotel

$$\theta_1 = 700 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

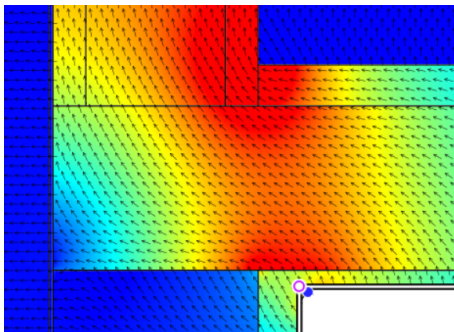
$$\text{Po dosazení: } R = 0,4 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

2 chladný kotel

$$\theta_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}, \theta_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\text{Po dosazení: } R = 0,935 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

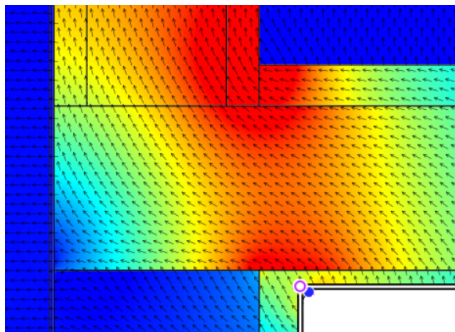
Fourierův zákon ve 3D



Obrázek: Teplo se šíří ve směru spádu (gradientu) teploty.

- Je směr toku tepla (šipky) v pořádku?
- Ne. Teplo se šíří vždy ve směru kolmém na izotermy!!

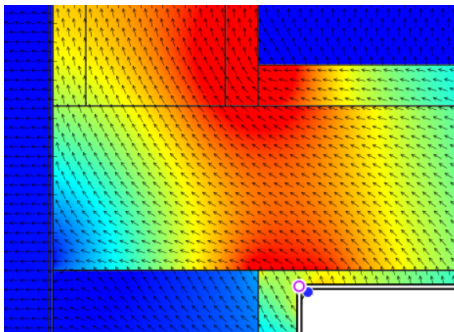
Fourierův zákon ve 3D



Obrázek: Teplo se šíří ve směru spádu (gradientu) teploty.

- Je směr toku tepla (šipky) v pořádku?
- Ne. Teplo se šíří vždy ve směru kolmém na izotermy!!

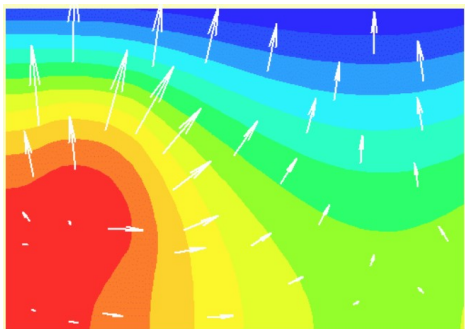
Fourierův zákon ve 3D



Obrázek: Teplo se šíří ve směru spádu (gradientu) teploty.

- Je směr toku tepla (šipky) v pořádku?
- Ne. Teplo se šíří vždy ve směru kolmém na izotermy!!

Fourierův zákon ve 3D



Obrázek: Trochu lepší obrázek

- šipky znázorňují směr toku tepla $\vec{q} = -\lambda \text{grad}\theta$
- čím delší šipka, tím je tok tepla větší

Fourierův zákon ve 3D

- Fourierův zákon v kartézských souřadnicích

$$q_x = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

- Fourierův zákon obecně jako vektorová rovnice

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} \theta$$

- **Teplo se šíří ve směru spádu teploty!**

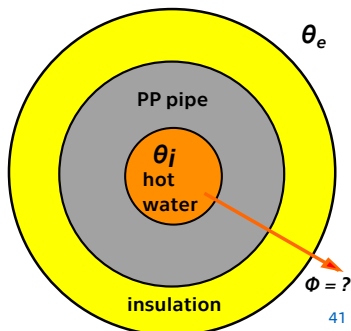
Tepelná ztráta izolovaného potrubí

Problém: vypočtete tepelné ztráty izolovaného potrubí délky 20 m!

- trubka: PP PN20 \varnothing 20 mm, $\lambda_{tr} = 0,22 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- teplota vody $\theta_i = 80 \text{ }^\circ\text{C}$
- izolace: URSA RS 1/Alu 20 mm, $\lambda_{iz} = 0,0359 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- teplota okolí $\theta_e = 10 \text{ }^\circ\text{C}$

Postup řešení:

- 1 vypočteme tepelnou ztrátu „holé“ trubky
- 2 připočteme vliv izolace
- 3 připočteme vliv přestupu tepla na povrchu

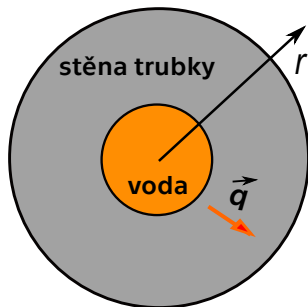


Potrubí s jednoduchou stěnou

1. krok: uvažujme potrubí bez izolace, předpokládejme, že **známe teploty obou povrchů**

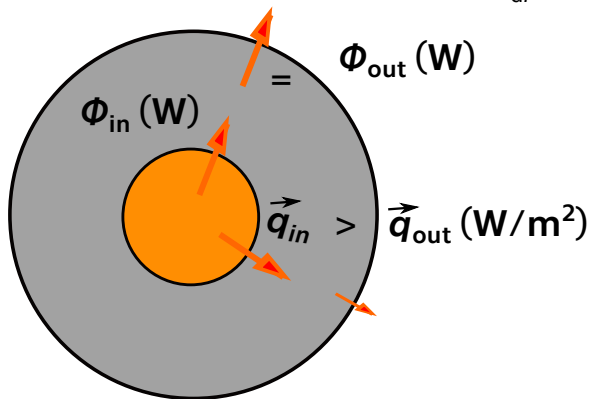
- Předpokládejme válcovou symetrii - spád teploty je pouze ve směru r .
- Pak je vedení tepla vlastně jednodimenzionální problém:

$$q = q_r = -\lambda \frac{d\theta}{dr}$$



Potrubí – ustálená situace

- Množství tepla, které prochází vniřním povrchem do stěny potrubí, musí být stejné, jako množství tepla, které ze stěny odchází vnějším povrchem
- nebo obecně: $\Phi = S q = -2\pi r l \lambda \frac{d\theta}{dr} = \text{konst.}$



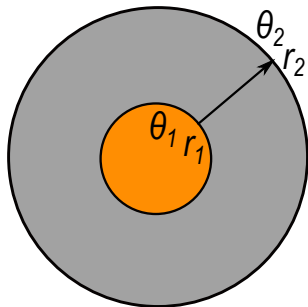
Potrubí s jednoduchou stěnou

- Pokusme se vyřešit rovnici $\Phi = -2\pi r l \lambda \frac{d\theta}{dr} = \text{konst.}$
- 1 Separací proměnných dostaneme $\Phi \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda d\theta$
- 2 Integrujeme s použitím okrajových podmínek na vnitřním a vnějším povrchu, tedy $\theta(r_1) = \theta_1$, $\theta(r_2) = \theta_2$:

$$\int_{r_1}^{r_2} \Phi \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$\Phi (\ln r_2 - \ln r_1) = -2\pi l \lambda (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Phi = -l \cdot \frac{2\pi \lambda (\theta_2 - \theta_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$



Potrubí s jednoduchou stěnou

Vyčíslíme 1. krok problému definovaného na slejdu 41

Potrubí PP, 20 metrů dlouhé, další data:

- $\theta_1 = 80^\circ\text{C}$ (teplota vody v potrubí)
- vnitřní prům. $d_1 = 13,2\text{ mm}$, vnější prům. $d_2 = 20,0\text{ mm}$
- tepelná vodivost $\lambda = 0,22\text{ W K}^{-1}\text{ m}^{-1}$
- Teplota vnějšího povrchu $\theta_2 = 76,5^\circ\text{C}$ (vypočteme později!)

Řešení

$$\Phi = -l \cdot \frac{2\pi\lambda(\theta_2 - \theta_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\Phi = -20 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,22 \cdot (76,5 - 80)}{\ln \frac{20}{13,2}}$$

$$\Phi \doteq 230\text{ W}$$

Tepelný odpor stěny potrubí

- Porovnejme výrazy pro výpočet tepelného toku pro „zed“ a pro stěnu potrubí.
- Obecně platí: Tok = *příčné rozměry* x *nějaká funkce podélných rozměrů a vodivosti* (U, R^{-1}) x *rozdíl teplot*

Zed:

$$\Phi = -S \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Phi = -S \cdot \frac{1}{R} \cdot \Delta\theta$$

Potrubí:

$$\Phi = -l \cdot \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Phi = -l \cdot \frac{1}{R_l} \cdot \Delta\theta$$

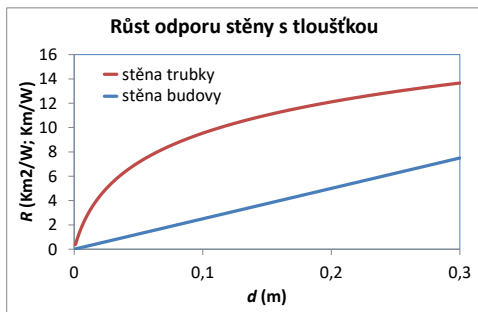
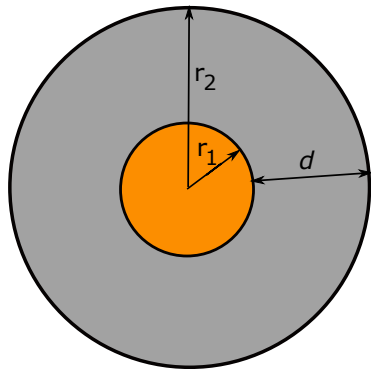
- Na místě příčného rozměru vystupuje u potrubí délka l !
- Plocha prostupu S není v případě potrubí konstantní, ale mění se se vzdáleností od osy potrubí!

Tepelný odpor stěny potrubí

Tepelný odpor vztažený
na **metr délky**

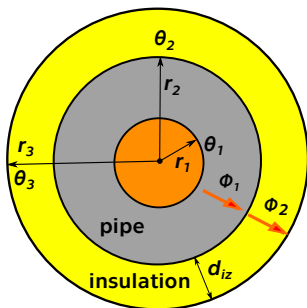
$$R_l = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda} = \frac{\ln \frac{r_1+d}{r_1}}{2\pi\lambda} \text{ (K m}^1 \text{ W}^{-1}\text{)}$$

Tepelný odpor stěny potrubí
roste logaritmicky
s její tloušťkou!



Potrubí s izolací

Pro výpočet tepelného odporu dvouvrstvého pláště trubky použijeme obdobný postup, jaký jsme použili při výpočtu odporu stěny s více vrstvami.



- Tepelný tok vypočteme pro každou vrstvu zvlášť:

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi/\lambda_{tr}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Phi_2 = -\frac{2\pi/\lambda_{iz}}{\ln \frac{r_3}{r_2}} (\theta_3 - \theta_2)$$

- Neznáme teplotu θ_2 a toky Φ_1 a Φ_2 , vše ostatní je zadáno.

Potrubí s izolací

- Za předpokladu **ustáleného** vedení tepla ovšem platí:

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

- Vyloučením neznámé teploty θ_2 dostaneme

$$\Phi = I \frac{\theta_3 - \theta_1}{R_{l,tr} + R_{l,iz}}$$

kde

$$R_{l,tr} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_{tr}}, \quad R_{l,iz} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_{iz}}, \quad I \text{ je délka trubky}$$

**Tepelný odpor pláště trubky s izolací
vztažený na metr délky**

$$R_{l,T} = R_{l,tr} + R_{l,iz}$$

Potrubí s izolací

Vyčíslíme 2. krok problému definovaného na slejdu 41

- 1** PP trubka, vnitřní teplota $\theta_1 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$:
 - Vnitřní průměr $d_1 = 13,2 \text{ mm}$, vnější prům. $d_2 = 20,0 \text{ mm}$
 - Tepelná vodivost $\lambda_{tr} = 0,22 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$
- 2** Izolace, vnější teplota $\theta_3 = 21,2 \text{ }^\circ\text{C}$ (vypočteme později!):
 - Vnitřní průměr $d_2 = 20,0 \text{ mm}$, vnější prům. $d_3 = 60,0 \text{ mm}$
 - Tepelná vodivost $\lambda_{iz} = 0,0359 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$

$$R_{l,tr} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_{tr}} = \frac{\ln \frac{20}{13,2}}{2 \cdot \pi \cdot 0,22} = 0,30 \text{ m K W}^{-1}$$

$$R_{l,iz} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_{iz}} = \frac{\ln \frac{60}{20}}{2 \cdot \pi \cdot 0,0359} = 4,87 \text{ m K W}^{-1}$$

$$R_{l,c} = R_{l,tr} + R_{l,iz} = 5,17 \text{ m K W}^{-1}$$

$$\Phi = -I \frac{1}{R_{l,c}} \Delta\theta = -\frac{1}{5,17} (21,2 - 80) \doteq 230 \text{ W}$$

Tepelný odpor při přestupech na povrchu

Tok tepla Φ při přestupu z povrchu trubky do okolí můžeme vyjádřit pomocí odporu při přestupu R_{se} stejně jako jsme to udělali v případě toku tepla stěnou: $\Phi = S \frac{\Delta\theta}{R_{se}}$, kde

- $S = 2\pi r_3 l$ je plocha povrchu, $R_{se} = \frac{1}{h_{se}}$,
- $\Delta\theta$ je rozdíl teploty mezi povrchem a teplotou okolí,
- r_3 je vnější poloměr trubky.

Ale jak už víme plocha S nemá v případě trubky moc velký smysl – použijeme délku l : $\Phi = l \frac{\Delta\theta}{R_{l,se}}$

Porovnáním dostaneme:

Odpor při přestupu tepla **vztažený na metr délky**

$$R_{l,se} = R_{se} \frac{1}{2\pi r_3} = \frac{1}{2\pi h_{se} r_3}$$

Celkový tepelný odpor stěny trubky (na metr délky)

Vyčísleme 3. krok problému definovaného na sletdu 41

Tepelný odpor při přestupu na povrchu

- $h_{se} = 5,42 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ (vypočteme později!)
- $R_{l,se} = R_{se} \frac{1}{2\pi r_3} = \frac{1}{2\pi h_{se} r_3} = \frac{1}{2\pi \cdot 5,42 \cdot 0,030} = 0,98 \text{ K m W}$

Celkový tepelný odpor

- $R_{l,T} = R_{l,tr} + R_{l,iz} + R_{l,se} = 0,3 + 4,87 + 0,98 = 6,15 \text{ K m W}$

Tepelný tok

$$\Phi = -I \frac{1}{R_{l,T}} \Delta\theta = -\frac{1}{6,15} (10 - 80) \doteq 230 \text{ W}$$

Tepelná ztráta potrubí – shrnutí

Zadání úlohy viz slajd 41

Nyní známe tepelný tok, můžeme tedy vypočítat teploty, které jsme použili při výpočtech v 1. a 2. kroku řešení úlohy:

- 1** Ze vztahu $\Phi = -I \cdot \frac{2\pi\lambda_{tr}(\theta_2 - \theta_1)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ vyjádříme teplotu na povrchu trubky θ_2

$$\theta_2 = \theta_1 - \Phi \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi\lambda_{tr}I}$$

$$\theta_2 = 80 - 230 \cdot \ln \frac{20}{13,2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 0,22 \cdot 20} = 76,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

- 2** Ze vztahu $\Phi = -I \frac{1}{R_{I,c}} (\theta_3 - \theta_1)$ vyjádříme teplotu na povrchu izolace θ_3

$$\theta_3 = \theta_1 - \Phi \frac{R_{I,c}}{I}$$

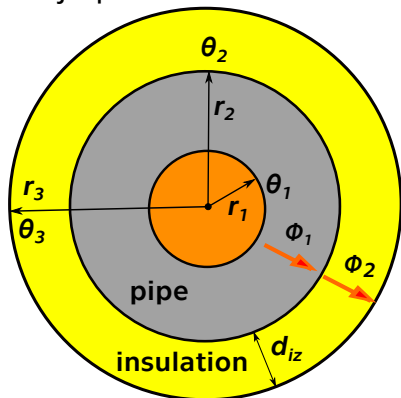
$$\theta_3 = 80 - 230 \cdot \frac{5,17}{20} = 20,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Nevyšlo nám to trochu jinak 🤔?

Celkový tepelný odpor na metr délky

$$R_{l,T} = R_{l,tr} + R_{l,iz} + R_{l,se} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_{tr}} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_{iz}} + \frac{1}{2\pi h_{se} r_3}$$

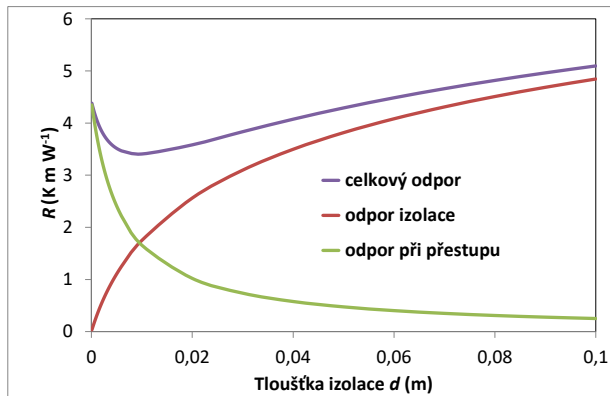
vnější poloměr závisí na tloušťce izolace: $r_3 = r_2 + d_{iz}$



Celkový tepelný odpor na metr délky

$$R_{l,T} = R_{l,tr} + R_{l,iz} + R_{l,se} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda_{tr}} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi\lambda_{iz}} + \frac{1}{2\pi h_{se} r_3}$$

vnější poloměr závisí na tloušťce izolace: $r_3 = r_2 + d_{iz}$



Optimální tloušťka stěny trubky chladiče?

Domácí úloha

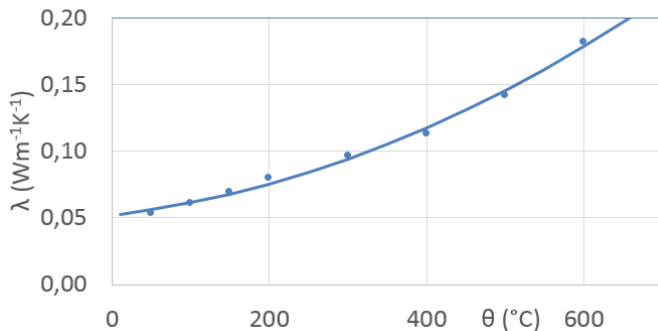
Určete, při které tloušťce d stěny neizolované ocelové trubky jsou tepelné ztráty potrubí **maximální**:

- Vnitřní průměr (světlost) trubky: $d_1 = 2 \text{ cm}$
- Součinitel tepelné vodivosti oceli $\lambda_{tr} = 50 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
- Součinitel při přestupu na vnějším povrchu $h_{se} = 8 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$
- Předpokládejme, že λ_{tr} ani h_{se} se nemění s teplotou ani s průměrem potrubí!

Tepelný odpor závisí na teplotě

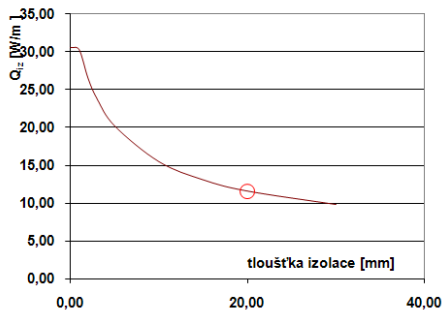
- 1 Součinitel přestupu tepla h_{se} závisí na teplotě!!! Více později.
- 2 Součinitel tepelné vodivosti λ tepelné izolace závisí na teplotě (příklad je pro minerální izolaci):

LMF 15 AluR



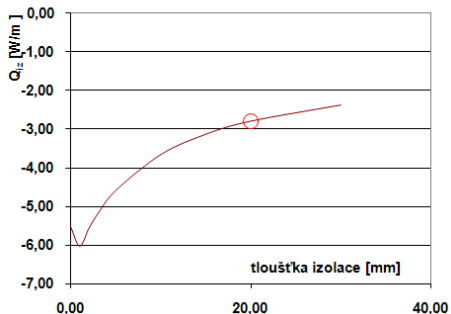
Cu trubka 12 mm

Graf tepelných ztrát izol. potrubí



teplá trubka: 90/15 °C

Graf tepelných ztrát izol. potrubí



studená trubka: 5/25 °C

software: [URSABIL 2.2](#) [3]

Chladnutí média protékajícího potrubím

- médium o počáteční teplotě θ_i proudí potrubím s průtokem \dot{m}
- jeho teplota poklesne na délce dl o $d\theta$
- množství tepla $d\dot{Q}$, které ztrácí chladnoucí médium za jednotku času určíme z kalorimetrické rovnice: $d\dot{Q} = c\dot{m}d\theta$
- stejné množství tepla projde stěnou potrubí ve formě tepelných ztrát: $d\dot{Q} = -dl \frac{\theta - \theta_e}{R_{l,T}}$

Celková bilance tepla

$$c \dot{m} d\theta = -dl \frac{\theta - \theta_e}{R_{l,T}}$$

Poznámka: $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$, $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$;

obecně značíme tečkou derivaci funkce dle času.

Chladnutí média protékajícího potrubím

řešíme rovnici $c \dot{m} d\theta = -dl \frac{\theta - \theta_e}{R_{l,T}}$

separací proměnných: $\frac{c \dot{m} d\theta}{(\theta - \theta_e)} = -dl \frac{1}{R_{l,T}}$

integrujeme podél trubky: $\int_{\theta_i}^{\theta} \frac{c \dot{m} d\theta}{(\theta - \theta_e)} = -\frac{1}{R_{l,T}} \int_0^l dl$

$[\ln(\theta - \theta_e)]_{\theta_i}^{\theta} = -\frac{1}{c \dot{m} R_{l,T}} [l]_0^l$

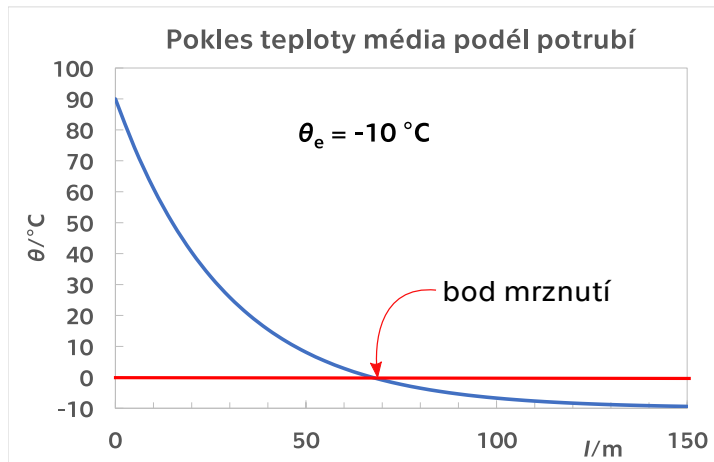
$\ln \frac{(\theta - \theta_e)}{(\theta_i - \theta_e)} = -\frac{l}{c \dot{m} R_{l,T}}$

odlogaritmuje a dostaneme

Pokles teploty podél potrubí

$$\theta(l) = \theta_e + (\theta_i - \theta_e) \exp\left(-\frac{l}{c \dot{m} R_{l,T}}\right)$$

Chladnutí média protékajícího potrubím



- Teplota média se limitně blíží okolní teplotě

Tepelný tok ve sférické symetrii

Pro ustálené vedení platí (teplo se nikde nehromadí):

$\Phi(r) = \text{konst.}$ množství tepla procházející kulovou plochou
nezávisí na jejím poloměru!

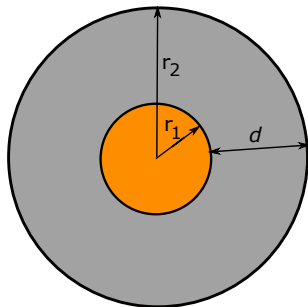
$$\Phi(r) = S(r)q(r) = \text{konst.}, S(r) = 4\pi r^2$$

$$q(r) = -\lambda \frac{d\theta}{dr} \text{ (Fourierův zákon)}$$

$$\text{tedy: } \Phi(r) = -4\pi r^2 \lambda \frac{d\theta}{dr} = \text{konst.}$$

Separací proměnných dostaneme:

$$-4\pi\lambda d\theta = \Phi \frac{dr}{r^2}$$



Tepelný tok ve sférické symetrii

Integrací dostaneme:

$$-4\pi\lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \Phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$-4\pi\lambda(\theta_2 - \theta_1) = -\Phi\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

a tedy tepelný tok: $\Phi = 4\pi\lambda \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}$

a tepelný odpor: $R = \frac{\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)}{4\pi\lambda} \text{ (K W}^{-1}\text{)}$

Povšimněte si jednotek tepelného odporu - není vztažen na jednotku plochu ani délky.

Proč 🤔?

Triviální příklad bilance energie

Voda v hrnci na plotně

- Do hrnce nalijeme vodu o hmotnosti $m = 0,7 \text{ kg}$,
- teplotě $\theta_1 = 20 \text{ °C}$.
- Ohříváme výkonem $P = 3 \text{ kW}$ po dobu $\tau = 5 \text{ minut}$
- Tepelné ztráty do okolí jsou $Q_z = -600 \text{ kJ}$

- Jaká bude výsledná teplota vody v hrnci θ_x ?

Triviální příklad bilance energie

Postup řešení

Sestavíme bilanci energie

- $\Delta Q = P \cdot \tau + Q_z$
- $\Delta U = (\theta_x - \theta_1) mc$
- z rovnosti $\Delta U = \Delta Q$ určíme výslednou teplotu:

$$\theta_x = \frac{P \cdot \tau + Q_z + \theta_1 mc}{mc} = 122 \text{ °C}$$

- **Není to nějak moc?**

Voda v hrnci na plotně

Postup řešení

- Výsledná teplota je vyšší než bod varu θ_v , je tedy zřejmé, že $\theta_x = \theta_v$

- Vypočteme znovu změnu vnitřní energie pro $\theta_x = \theta_v$ a připočteme změnu vnitřní energie způsobenou změnou skupenství

$$\Delta U = (\theta_v - \theta_1) mc + m_v l_v$$

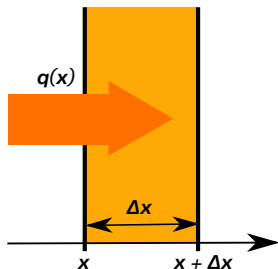
- z rovnosti $\Delta U = \Delta Q$ určíme množství vypařené vody m_v :

$$m_v = \frac{P \cdot \tau + Q_z - (\theta_v - \theta_1) mc}{l_v}$$

$$m_v = 0,029 \text{ kg}$$

1 - dimenzionální vedení tepla v tenké vrstvě stěny

- tok tepla q má směr osy x
- q se tentokrát podél x mění (!)
 - $q(x)$ označuje tok v místě x
 - $q(x + \Delta x)$ je tok v místě $x + \Delta x$

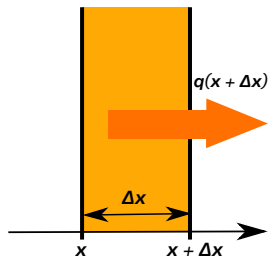


Bilance tepla ve vrstvě

- za čas $\Delta\tau$ plochou S v místě x do vrstvy **přiteče**: $q(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- v místě $x + \Delta x$ z vrstvy **odteče**: $q(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- ve vrstvě **zůstane rozdíl ΔQ** :

1 - dimenzionální vedení tepla v tenké vrstvě stěny

- tok tepla q má směr osy x
- q se tentokrát podél x mění (!)
 - $q(x)$ označuje tok v místě x
 - $q(x + \Delta x)$ je tok v místě $x + \Delta x$

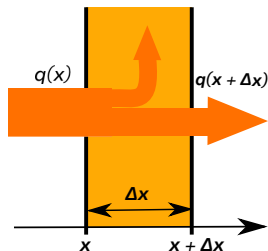


Bilance tepla ve vrstvě

- za čas $\Delta\tau$ plochou S v místě x do vrstvy přiteče: $q(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- v místě $x + \Delta x$ z vrstvy odteče: $q(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- ve vrstvě zůstane rozdíl ΔQ :

1 - dimenzionální vedení tepla v tenké vrstvě stěny

- tok tepla q má směr osy x
- q se tentokrát podél x mění (!)
 - $q(x)$ označuje tok v místě x
 - $q(x + \Delta x)$ je tok v místě $x + \Delta x$



Bilance tepla ve vrstvě

- za čas $\Delta\tau$ plochou S v místě x do vrstvy **příteče**: $q(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- v místě $x + \Delta x$ z vrstvy **odteče**: $q(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
- ve vrstvě **zůstane rozdíl** ΔQ :

$$-\Delta q \cdot \Delta\tau \cdot S = -(q(x + \Delta x) - q(x)) \cdot \Delta\tau \cdot S = \Delta Q$$

Bilance tepla ve vrstvě materiálu

- Množství tepla, které zůstane ve vrstvě za jednotku času:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- z 1. věty termodynamické $\Delta Q = \Delta U$
(protože pevná látka nemění objem!) a tedy

$$\frac{\Delta U}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- Vnitřní energie U se mění s teplotou $\Delta U = m c \Delta \theta$, proto

$$\frac{m c \Delta \theta}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

Bilance tepla ve vrstvě materiálu

- Množství tepla, které zůstane ve vrstvě za jednotku času:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- z 1. věty termodynamické $\Delta Q = \Delta U$
(protože pevná látka nemění objem!) a tedy

$$\frac{\Delta U}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- Vnitřní energie U se mění s teplotou $\Delta U = m c \Delta \theta$, proto

$$\frac{m c \Delta \theta}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

Bilance tepla ve vrstvě materiálu

- Množství tepla, které zůstane ve vrstvě za jednotku času:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- z 1. věty termodynamické $\Delta Q = \Delta U$
(protože pevná látka nemění objem!) a tedy

$$\frac{\Delta U}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

- Vnitřní energie U se mění s teplotou $\Delta U = m c \Delta \theta$, proto

$$\frac{m c \Delta \theta}{\Delta \tau} = -S \cdot \Delta q$$

Bilance tepla ve vrstvě materiálu

- protože $m = \rho \cdot V$ a objem vrstvy lze vyjádřit $V = S \cdot \Delta x$ máme

$$\frac{\rho c \Delta\theta \cdot S \cdot \Delta x}{\Delta\tau} = -S \cdot \Delta q$$

- a konečně

$$\frac{\rho c \Delta\theta}{\Delta\tau} = -\frac{\Delta q}{\Delta x} \quad (1)$$

- Bilanci v tomto tvaru lze přímo použít k numerickému řešení nerovnovážného vedení tepla metodou konečných diferencí nebo metodou konečných objemů.

Bilance tepla ve vrstvě materiálu

- protože $m = \rho \cdot V$ a objem vrstvy lze vyjádřit $V = S \cdot \Delta x$ máme

$$\frac{\rho c \Delta\theta \cdot S \cdot \Delta x}{\Delta\tau} = -S \cdot \Delta q$$

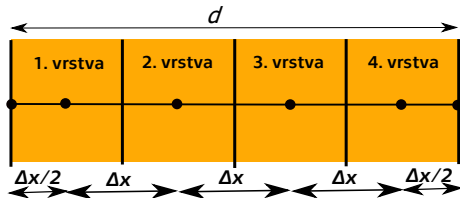
- a konečně

$$\frac{\rho c \Delta\theta}{\Delta\tau} = -\frac{\Delta q}{\Delta x} \quad (1)$$

- Bilanci v tomto tvaru lze přímo použít k numerickému řešení nerovnovážného vedení tepla metodou konečných diferencí nebo metodou konečných objemů.

Příklad numerického řešení metodou konečných diferencí v Excelu

- Stěnu tloušťky d „rozřežeme“ na několik (řekněme n) tenkých vrstev o tloušťce $\Delta x = \frac{d}{n}$
- Příklad pro $n = 4$:
 - každý „uzel“ sítě je ve středu vrstvy,
 - okrajové uzly jsou na povrchu stěny.
- Vzdálenost mezi uzly je tedy Δx ; u povrchů poloviční



Neustálené šíření tepla v homogenní stěně

- řešení v Excelu

- Stěna bude v excelu reprezentována jedním řádkem o $n + 1$ buňkách, každá buňka reprezentuje **uzel** sítě (tedy **střed** vrstvy, případně povrch stěny).
- Hodnota každé buňky vyjadřuje teplotu v daném místě.
- V buňkách je vzorec, který počítá teplotu po uplynutí času $\Delta\tau$:
$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta,$$
 - kde $\Delta\theta = -\frac{\Delta q}{\rho c \Delta x} \Delta\tau,$
 - kde Δq je celkový tok tepla do vrstvy (zleva i zprava),
 - tedy $\Delta q = q(x + \Delta x) - q(x)$

Neustálené šíření tepla v homogenní stěně

- řešení v Excelu

vrstva uvnitř stěny (sloupec G) a na levém okraji stěny (sloupec F):

		F	G
Počáteční teplota	5	20	20
i-tá iterace	6	=KDYŽ(start;F5;F10)	=KDYŽ(start;G5;G10)
$q(x)$, tok zleva	7	=(E6-F6)*λ/(Δx/2)	=(F6-G6)*λ/Δx
$q(x + \Delta x)$, tok doprava	8	=(F6-G6)*λ/(Δx)	=(G6-H6)*λ/(Δx)
$\Delta\theta$ změna teploty	9	=(F7-F8)/(ρ*cp*Δx)*Δt	=(G7-G8)/(ρ*cp*Δx)*Δt
i+1. iterace	10	=F6+F9	=G6+G9
x	11	=Δx/2	=F11+Δx
Analytické řešení	12	=20+(E5-20)*(1-ERF(F11/ODMOCNINA(4*λ/ρ/cp*\$B10*60)))	

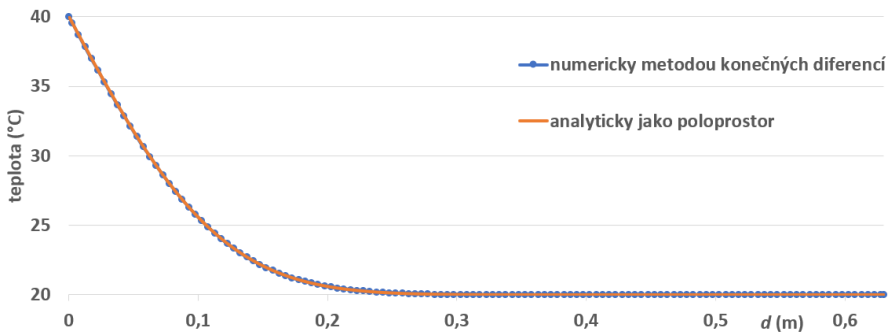
ke stažení:

<https://people.fsv.cvut.cz/~vydra/programy/RceVedeniTeplaMKD.xlsm>

Neustálené šíření tepla v homogenní stěně

- výsledek řešení v Excelu

Rozložení teploty v betonové stěně

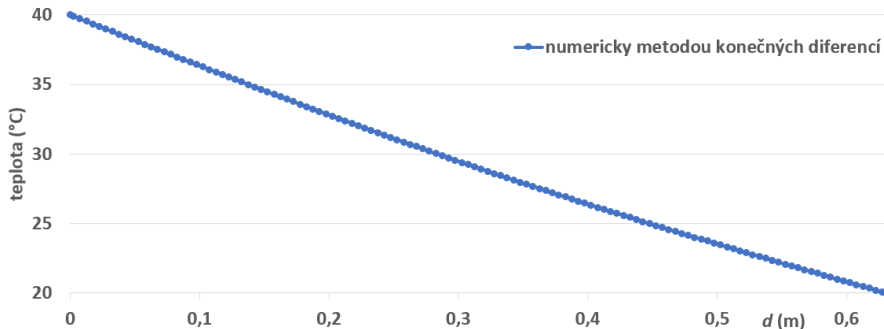


Rozložení teploty v silné betonové stěně po dvou hodinách po skokovém zvýšení teploty na levém povrchu

Neustálé šíření tepla v homogenní stěně

- řešení v Excelu

Rozložení teploty v betonové stěně



Rozložení teploty v silné betonové stěně po dvou dnech po skokovém zvýšení teploty na levém povrchu – prakticky ustálený stav

Bilance tepla v limitě $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta \tau \rightarrow 0$

Bilanci energie ve vrstvě materiálu (rovnice (1)) zúžíme na „bod“ a nekonečně krátký okamžik:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\rho c \Delta \theta}{\Delta \tau} &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= - \frac{\partial}{\partial x} q \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

- za q dosadíme z Fourierova zákona $q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$

Rovnice vedení tepla

Pro $\lambda = \text{konst.}$ lze rovnici ještě upravit:

Rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

- kde $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ je součinitel teplotní vodivosti

Řešení rovnice vedení tepla $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

Je to parciální diferenciální rovnice parabolického typu, řeší se:

- Analyticky – jde jen v některých jednoduchých případech
- Numericky
 - metodou FEM (Finite Element Method) aka MKP (složitá geometrie)
 - metodou FDM (Finite Difference Method) aka MKD (pravoúhlé geometrie)
viz příklad v Excelu o pár stránek dříve

Analytické řešení v triviálním případě

Řešme rovnici vedení tepla v triviálním případě vedení tepla v homogenní stěně tloušťky d v ustálené situaci, s okrajovými podmínkami $\theta(0) = \theta_{si}$, $\theta(d) = \theta_{se}$.

- Je to ustálený případ, proto $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ a rce vedení tepla

$$0 = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$0 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$c_1 = \int \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx$$

$$c_1 x + c_2 = \int \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

$$c_1 x + c_2 = \theta(x)$$

Analytické řešení v triviálním případě

Průběh teploty ve stěně je tedy lineární

$$\theta(x) = c_1 x + c_2$$

Zbývá určit integrační konstanty c_1 a c_2 .

Určíme je dosazením okrajových podmínek:

- $x = 0$ tedy $\theta(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 = \theta_{si}$
- $x = d$ tedy $\theta(d) = c_1 \cdot d + c_2 = c_1 d + \theta_{si} = \theta_{se}$
 - odtud určíme $c_1 = \frac{\theta_{se} - \theta_{si}}{d}$ a konečně

$$\theta(x) = \frac{\theta_{se} - \theta_{si}}{d} x + \theta_{si}$$

Okrajové podmínky rovnice vedení tepla

Okrajové podmínky mohou být

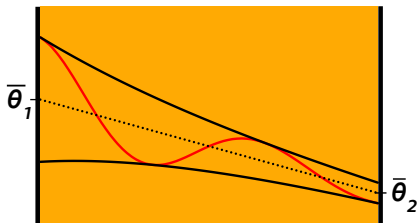
- konstantní
- proměnné s časem – například periodicky

Dirichletova podmínka

Na okraji je známa teplota

$$\theta(0, \tau) = f_1(\tau)$$

$$\theta(d, \tau) = f_2(\tau)$$



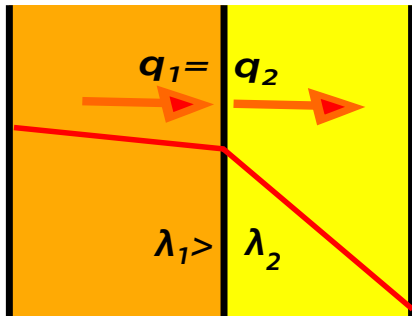
Okrajové podmínky rovnice vedení tepla

Styk dvou pevných těles

na rozhraní musí platit:

tok zleva = tok doprava

$$-\lambda_1 \frac{d\theta}{dx} \Big|_{\text{zleva}} = -\lambda_2 \frac{d\theta}{dx} \Big|_{\text{zprava}}$$



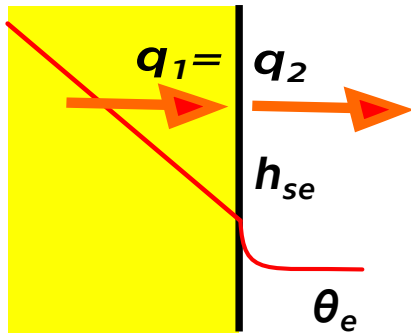
Okrajové podmínky rovnice vedení tepla

Newtonova podmínka

Na okraji je znám součinitel přestupu tepla h_{se}
a okolní teplota θ_e

musí platit: tok zleva = tok doprava

$$-\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{\text{na okraji}} = h_{se} (\theta_e - \theta)$$



Okrajové podmínky rovnice vedení tepla

Neumannova podmínka

- Na okraji je znám tepelný tok

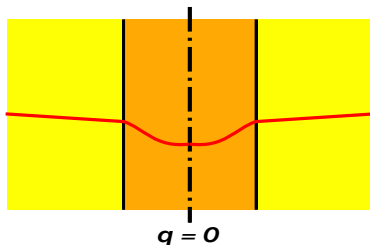
$$q(0, \tau) = f_1(\tau)$$

$$q(d, \tau) = f_2(\tau)$$

- Speciální případ je izolované těleso a rovina symetrie:

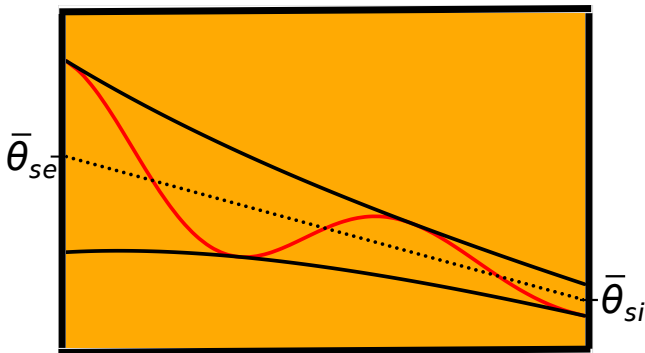
$$q(0, \tau) = q(d, \tau) = 0 \text{ a tedy}$$

$$\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{\text{na okraji}} = 0$$



Periodické okrajové podmínky

- Pro určení **dynamického chování** konstrukce v letním období
- V konstrukci dochází k **útlumu amplitudy** kolísání teploty na povrchu
- Dochází ke **zpoždění** (fázovému posunu) maxim a minim



Dynamické chování podle ČSN 730540-4

- Kolísání venkovní teploty:

$$\theta_{ex}(t) = \bar{\theta}_{ex} + \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \varphi\right)$$

- Kolísání teploty vnitřního povrchu:

$$\theta_{si}(t) = \bar{\theta}_{si} + \frac{\theta_0}{v} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \varphi - \psi\right)$$

ψ – **fázové posunutí teplotního kmitu** – za kolik hodin se kolísání venkovní teploty projeví na vnitřním povrchu

v – **teplotní útlum** – kolikrát je kolísání teploty vnitřního povrchu nižší než kolísání teploty vnějšího vzduchu (povrchu)

Dynamické chování podle ČSN 730540-4

konstrukce	fázový posuv	teplotní útlum ν
	(h)	(-)
plná cihla 45 cm	+16	75
dtto + ETICS	+18	2190
Porotherm 44 cm	+23	980
lehká kce OSB	+3,3	63
lehká kce Heraklith	+4,5	72

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

Periodické okrajové podmínky jsou definovány takto

$$\theta_e(\tau) = \bar{\theta}_e + \theta_{e0} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \varphi\right)$$

$$\theta_i(\tau) = \bar{\theta}_i + \theta_{i0} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \varphi + \psi\right)$$

ψ fázové posunutí je definováno podobně jako dle ČSN 730540-4

- ale pozor na opačné znaménko
 - je-li posun kladný, dochází k předbíhání
 - záporný posun znamená zpoždění!

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

- Okrajové podmínky se zapisují pomocí komplexních čísel
- Připomínám, že komplexní číslo \hat{a} lze zapsat v goniometrickém tvaru takto:

$$\hat{a} = |\hat{a}| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = |\hat{a}| \cdot e^{i\alpha}$$

- Pak periodickou část teploty vnějšího prostředí

$$\theta_e(\tau) = \bar{\theta}_e + \left| \hat{\theta}_e \right| \cos \left(\frac{2\pi}{T} \tau + \varphi \right)$$

- lze zapsat jako reálnou část komplexního čísla

$$\hat{\theta}_e = \left| \hat{\theta}_e \right| \cdot e^{\frac{2\pi}{T} \tau} \cdot e^{i\varphi}$$

- tedy $\theta_e(\tau) = \bar{\theta}_e + \operatorname{Re} \left(\left| \hat{\theta}_e \right| \cdot e^{\frac{2\pi}{T} \tau} \cdot e^{i\varphi} \right)$

Periodickou část teploty beru jako komplexní číslo $\hat{\theta}_e$

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

ČSN EN ISO 13786 definuje různé veličiny, např.:

Admitance tepla na vnitřním i vnějším povrchu

Periodická kapacita na vnitřním i vnějším povrchu

Periodický prostup tepla konstrukcí v zadaném směru (obvykle zvnějšku dovnitř)

f faktor útlumu – poměr dynamického a statického součinitele prostupu tepla

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

Admittance tepla na vnitřním povrchu při konst. venkovní teplotě

- $\hat{\theta}_i$ je periodická část vnitřní teploty
- \hat{q}_{si} je periodická část měrného tepelného toku přes vnitřní povrch

$$\hat{Y}_{ii} = \left. \frac{\hat{q}_{si}}{\hat{\theta}_i} \right|_{\theta_e = \text{konst.}} \quad (\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1})$$

- Admittance je opět komplexní veličina obsahuje informaci o
 - velikosti toku tepla přes povrch v závislosti na amplitudě kolísání vnitřní teploty
 - fázovém posuvu mezi tepelným tokem a teplotou

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

Admitance tepla na vnitřním povrchu pro různé konstrukce

konstrukce	modul	posuv	periodická kapacita
	($\text{W m}^{-2}\text{K}^{-1}$)	(h)	($\text{kJ m}^{-2}\text{K}^{-1}$)
plná cihla 45 cm	4,7	+1,3	66
dtto + ETICS	4,7	+1,3	66
Porotherm 44 cm	3,3	+2,6	46
lehká kce OSB	1,6	+4,6	19
lehká kce Heraklith	1,8	+4,9	25

Těžká konstrukce na vnitřní straně obvodových stěn zajišťuje větší odolnost interiéru proti přehřátí způsobenému například solárním příkonem okny

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

Periodický prostup tepla stěnou (dynamický součinitel prostupu)

- $\hat{\theta}_e$ je periodická část vnější teploty
- \hat{q}_{si} je periodická část měrného tepelného toku přes vnitřní povrch

$$\hat{Y}_{ie} = \left. \frac{\hat{q}_{si}}{\hat{\theta}_e} \right|_{\theta_i = \text{konst.}}$$

f faktor útlumu – poměr dynamického a statického součinitele prostupu tepla

$$f = \left| \frac{\hat{q}_{si}}{\hat{\theta}_e} \right| \cdot \frac{1}{U}$$

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

Prostup tepla stěnou

konstrukce	statický	dynamický \hat{Y}_{ie}		faktor f
	U	modul	posuv	
	($W m^{-2}K^{-1}$)	($W m^{-2}K^{-1}$)	(h)	(-)
plná cihla 45 cm	1,34	0,10	-16	0,08
dtto + ETICS	0,17	0,003	-18	0,02
Porotherm 44 cm	0,32	0,008	-23	0,03
lehká kce OSB	0,13	0,12	-3	0,92
lehká kce Heraklith	0,13	0,11	-5	0,82

Dynamické chování podle ČSN EN ISO 13786

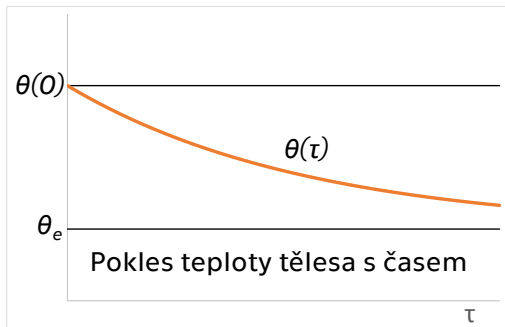
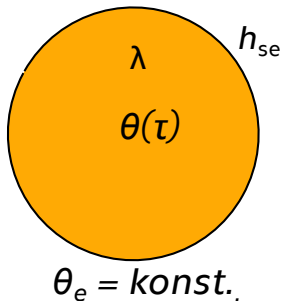
Kompletní popis dynamického chování:

- pomocí **komplexní přenosové matice** \hat{Z} :

$$\begin{pmatrix} \hat{\theta}_{si} \\ \hat{q}_{si} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{21} & \hat{Z}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{se} \\ \hat{q}_{se} \end{pmatrix}$$

Newtonův zákon ochlazování

- Popisuje chladnutí malých těles s vysokou tepelnou vodivostí
- Známe:
 - součinitel tepelné vodivosti tělesa λ
 - součinitel přestupu tepla na povrchu tělesa h_{se}
 - okolní teplotu θ_e a počáteční teplotu tělesa $\theta(0)$



Newtonův zákon ochlazování – řešení úlohy

- Tok tepla z povrchu tělesa do okolí

$$\Phi = h_{se} \cdot S \cdot (\theta(\tau) - \theta_e)$$

- Musí se rovnat úbytku vnitřní energie tělesa

$$\frac{dU}{d\tau} = -c \cdot m \cdot \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}$$

- Tedy

$$h_{se} \cdot S \cdot (\theta(\tau) - \theta_e) = -c \cdot m \cdot \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}$$

Newtonův zákon ochlazování – řešení úlohy

- Řešíme jako obvykle separací proměnných

$$h_{se} \cdot S \cdot d\tau = -c \cdot m \cdot \frac{d\theta(\tau)}{(\theta(\tau) - \theta_e)}$$

- Integrujeme podle času od nuly do τ ,
respektive od $\theta(0)$ do $\theta(\tau)$:

$$h_{se} \cdot S \cdot (\tau - 0) = -c \cdot m \cdot \ln \frac{(\theta(\tau) - \theta_e)}{(\theta(0) - \theta_e)}$$

- Konečně

$$\theta(\tau) = \theta_e + (\theta(0) - \theta_e) \cdot \exp\left(-\frac{h_{se} S}{c \rho V} \tau\right)$$

Newtonův zákon ochlazování – platnost

- Kdy lze tento jednoduchý zákon použít?
- Když je teplota tělesa během chladnutí stejná uvnitř i na povrchu!
- To lze zjednodušeně odhadnout porovnáním tepelného odporu „vnitřku“ tělesa a odporu při přestupu.
- Tento poměr je znám jako **Biotovo číslo**

$$Bi = \frac{R_{\text{internal}}}{R_{\text{se}}} = \frac{d/\lambda}{1/h_{\text{se}}} = \frac{h_{\text{se}} \cdot d}{\lambda}$$

- d je rozměr tělesa – musí zahrnovat i jeho tvar.
- Místo d se používá tzv. **charakteristická délka** $L_c = \frac{V}{S}$.
- Newtonův zákon ochlazování má slušnou přesnost pokud

$$Bi \leq 0,1$$

Newtonův zákon ochlazování – platnost

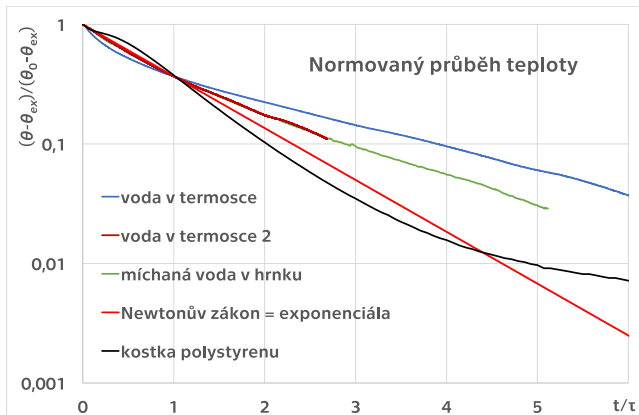
Kdy lze použít Newtonův zákon ochlazování

- když h_{se} a c jsou konstantní
 - při integrování jsme to předpokládali
- pokud nejsou, je třeba to při integrování zohlednit
 - lze použít numerický výpočet
 - například tzv. přírůstkovou metodu

Příklady použití

- ohřev ocelového nosníku při požáru (pro $\theta \approx 700^\circ\text{C}$)
- chladnutí/ohřev nádob s kapalinou, zejména je-li promíchávána.

Newtonův zákon ochlazování – platnost



- Odchylka skutečných průběhů teploty od exponenciálního není v těchto případech větší než 10 %

Newtonův zákon ochlazování – příklad

Chladnutí mrtvoly

- Mrtvola nalezena v 17:00.
- Teplota těla 25 °C.
- Teplota místnosti 20 °C.
- Kdy došlo k vraždě?

- $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$
- $c = 3500 \text{ J kg}^{-1}$
- $\lambda = 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $S = 2 \text{ m}^2, V = 0,08 \text{ m}^3$
- $h_{se} = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Biotovo číslo

- $L_c = \frac{V}{S} = 0,04 \text{ m}$
- $Bi = \frac{h_{se} L_c}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0,04}{0,5} = 0,64$
- Výpočet bude zatížen přílišnou chybou!

Newtonův zákon ochlazování – příklad

Chladnutí mrtvoly

- Mrtvola nalezena v 17:00.
- Teplota těla 25 °C.
- Teplota místnosti 20 °C.
- Kdy došlo k vraždě?

- $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$
- $c = 3500 \text{ J kg}^{-1}$
- $\lambda = 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $S = 2 \text{ m}^2, V = 0,08 \text{ m}^3$
- $h_{se} = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Biotovo číslo

- $L_c = \frac{V}{S} = 0,04 \text{ m}$
- $Bi = \frac{h_{se} L_c}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0,04}{0,5} = 0,64$
- Výpočet bude zatížen přílišnou chybou!

Newtonův zákon ochlazování – příklad

Chladnutí mrtvoly

- Mrtvola nalezena v 17:00.
- Teplota těla 25 °C.
- Teplota místnosti 20 °C.
- Kdy došlo k vraždě?

- $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$
- $c = 3500 \text{ J kg}^{-1}$
- $\lambda = 0,5 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- $S = 2 \text{ m}^2, V = 0,08 \text{ m}^3$
- $h_{se} = 8 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

Biotovo číslo

- $L_c = \frac{V}{S} = 0,04 \text{ m}$
- $Bi = \frac{h_{se} L_c}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0,04}{0,5} = 0,64$
- Výpočet bude zatížen přílišnou chybou!

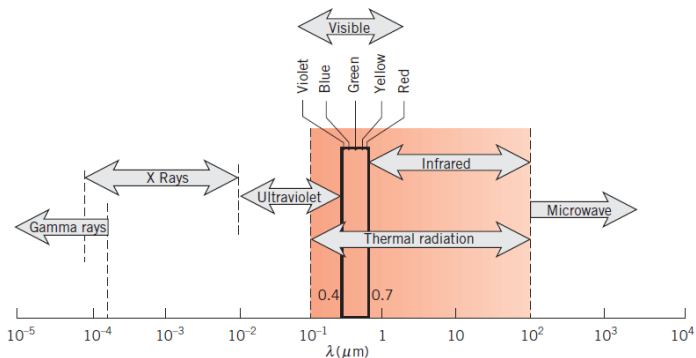
Chladnutí mrtvoly

Výpočet

- $\theta(\tau) = \theta_e + (\theta(0) - \theta_e) \cdot \exp\left(-\frac{h_{se}S}{c \cdot \rho \cdot V} \tau\right)$
- Dosadíme co víme:
- $25 = 20 + (36,5 - 20) \cdot \exp\left(-\frac{8 \cdot 2}{3500 \cdot 1000 \cdot 0,08} \tau\right)$
- Odtud: $\tau = 5,8 \text{ h}$.
- K vraždě došlo přibližně krátce po jedenácté.

Teplné záření povrchů pevných těles

- Povrch **každého** tělesa vyzařuje energii ve formě záření v široké oblasti vlnových délek
- Teplné záření je **viditelné**, **infračervené** a **ultrafialové** – liší se vlnovou délkou



Tepelné záření povrchů pevných těles

- **Zářivý tok (výkon) Φ (W)** je veličina analogická toku tepla při šíření tepla vedením
- **Intenzita vyzařování $H = \frac{d\Phi}{dS}$ (W m⁻²)** vyjadřuje zářivý výkon jednotky plochy povrchu a je tedy analogická hustotě tepelného toku q
- **Spektrální intenzita vyzařování $H_\lambda = \frac{dH}{d\lambda}$** vyjadřuje zářivý výkon jednotky plochy povrchu v úzkém intervalu vlnových délek

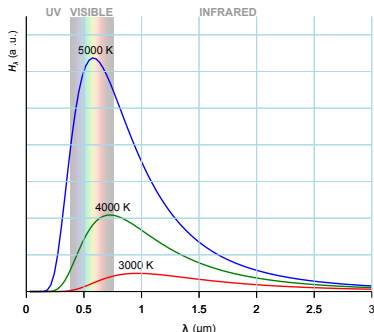
Planckův zákon pro ideální povrch

Záření ideálního povrchu popisuje **Planckův zákon**

Planckův zákon

$$H_{\lambda\check{c}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ m}^{-1})$$

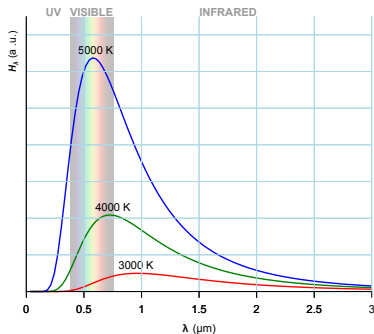
- T je **absolutní teplota povrchu**
- λ je vlnová délka emitovaného záření
- vše ostatní jsou fyzikální konstanty



Planckův zákon pro ideální povrch

Záření ideálního povrchu popisuje **Planckův zákon**

- Čím je těleso teplejší tím více vyzařuje na kratších vlnových délkách – je tedy **modřejší**
- Chladnější tělesa vyzařují více na delších vlnových délkách – jsou tedy **červené**
- nebo dokonce vyzařují jen v neviditelné infračervené oblasti.



Planckův zákon pro reálné povrchy

- reálné povrchy září hůře než povrch ideální
- schopnost povrchu zářit určuje vlastnost zvaná **emisivita e**
- pro spektrální intenzitu vyzařování reálného povrchu platí

$$H_{\lambda} = e(\lambda)H_{\lambda\check{c}}$$

- $H_{\lambda\check{c}}$ je spektrální intenzita vyzařování ideálního povrchu

Emisivita $e(\lambda)$

- emisivita je menší než jedna a větší než nula: $0 \leq e(\lambda) \leq 1$
- závisí na vlnové délce emitovaného záření
- povrch na některých vlnových délkách může vyzařovat lépe než na jiných

Emisivita – příklady

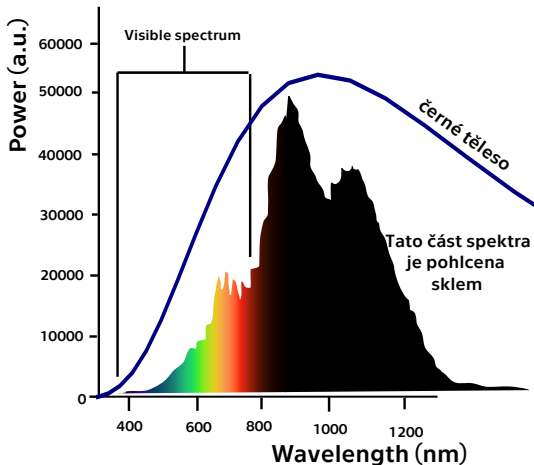
Ideální zářič - absolutně černé těleso

- ideální zářič má emisivitu rovnou jedné pro všechny vlnové délky
- nazývá se „**absolutně černé těleso**“
- Proč?
 - ideální zářič je též ideální „pohlcovač“
 - v dopadajícím světle je tedy **absolutně černý!**

Příklady reálných povrchů

- emisivita leštěných kovů v infračervené oblasti je velmi nízká
 - toho lze využít ke snížení tepelných ztrát zářením
 - hliníkové podstřešní fólie atp.

Emisivita – příklady



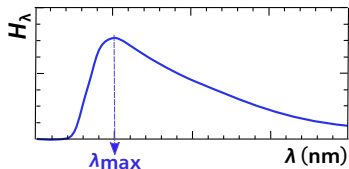
Spektrum halogenové žárovky při $T \approx 3000$ K

Vlnová délka maxima vyzařování

- λ_{\max} – vlnová délka, při které povrch tělesa vyzařuje s největší spektrální intenzitou vyzařování
- je to poloha maxima Planckova zákona

Wienův zákon

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \quad (\text{m})$$



- $b = 2,8978 \cdot 10^{-3} (\text{m K})$ je Wienova konstanta

těleso	povrch Slunce	lidské tělo
teplota	5780 K	310 K
λ_{\max}/nm	500 (modro-zelené světlo)	9300 (IR záření)

Celková intenzita vyzařování z povrchu tělesa

- Celková intenzita vyzařování přes všechny vlnové délky
- Integrací Planckova zákona přes celý rozsah vlnových délek (od nuly do nekonečna)
- Výsledkem je Stefan-Boltzmannův zákon.

Stefan-Boltzmannův zákon

$$H = \int_0^{\infty} H_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} e(\lambda) \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} d\lambda = e(T) \sigma T^4 \quad (\text{W m}^{-2})$$

Intenzita vyzařování z povrchu tělesa

Stefan-Boltzmanův zákon

$$H = e(T) \cdot \sigma T^4 \quad (\text{W m}^{-2})$$

- $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ (W m}^{-2} \text{ K}^{-4})$ je Stefan-Boltzmanova konstanta

Emisivita $e(T)$

- Tentokrát jako funkce teploty povrchu nikoliv vlnové délky!
- Příklady:
 - absolutně černé těleso:
 $e(\lambda) = 1$ pro všechny vlnové délky, tedy také $e(T) = 1$
 - „šedé“ těleso:
 $e(\lambda) = \text{konst.} < 1$ pro všechny vlnové délky, tedy také
 $e(T) = \text{konst.}$

Intenzita vyzařování z povrchu tělesa

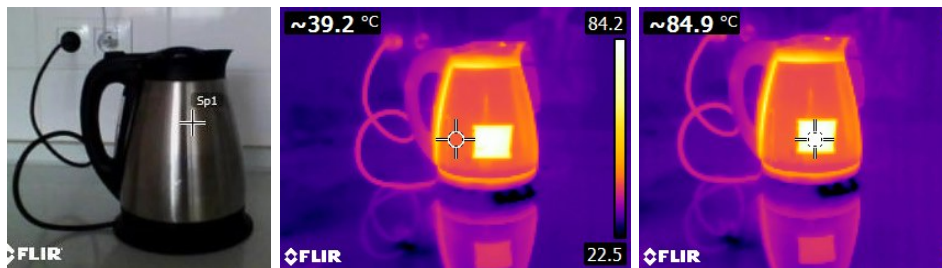
- Termokamery určují teplotu povrchu měřením intenzity záření z povrchu vycházejícího, tedy

$$T = \sqrt[4]{\frac{H}{e \cdot \sigma}}$$

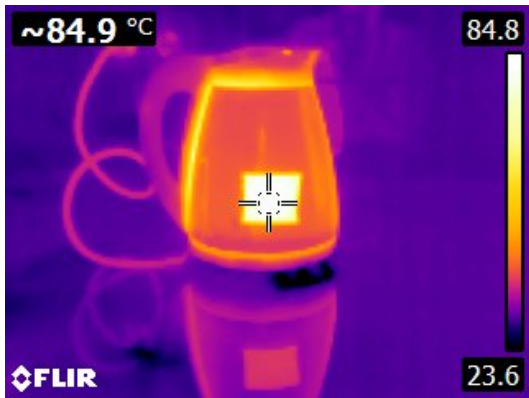
- Určení teploty je tedy silně ovlivněno emisivitou povrchu
- Emisivitu povrchu musíme znát a na kameře správně nastavit!

Vliv emisivity na určení teploty termokamerou

- Varná konvice s teplou vodou
 - vpředu je nalepen čtvereček průhledné lepicí pásky



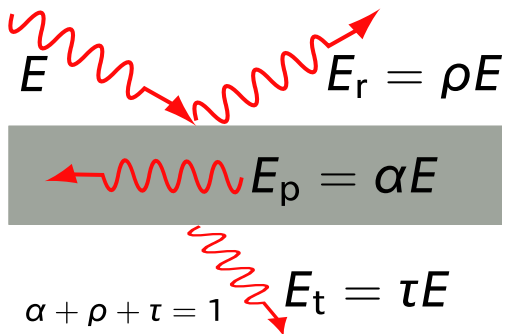
- Kovový povrch konvice má nízkou emisivitu \Rightarrow vyzařuje méně
- Povrch lepicí pásky má vyšší emisivitu \Rightarrow vyzařuje více
- Při stejném nastavení termokamera naměří na kovovém povrchu podstatně nižší **zdánlivou** teplotu než na pásce



Proč je přívodní kabel červený 🤔?

Záření dopadající na jiná tělesa

- Už umíme spočítat kolik energie povrch tělesa vyzařuje při určité teplotě.
- Co se s tím zářením děje dále?
 - dopadá na jiné povrchy (ozáření E (W m^{-2}))
 - tam se buď odráží (ρE), pohlcuje (αE) nebo prochází (τE)



Záření dopadající na jiná tělesa

- Schopnost (povrchu) pohlcovat záření je **pohltivost** a nebo α .
- Schopnost odrážet je reflektivita ρ .
- Průchodnost je transmisivita τ (záleží na tloušťce materiálu).
 - jejich hodnota leží mezi nulou a jedničkou
 - součet je roven jedné $\alpha + \rho + \tau = 1$
- **Dále nebudeme řešit semitrparentní tělesa** –
 - pro všechna tělesa pro jednoduchost předpokládáme $\tau = 0!!$
- Tedy $\rho = 1 - \alpha$

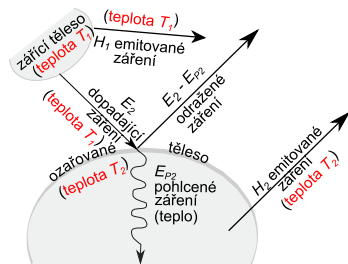
Pohltivost je různá pro různou „teplotu“ záření

$$a(T) = \frac{E_p}{E}$$

- E je intenzita ozáření
- E_p je záření pohlcované povrchem

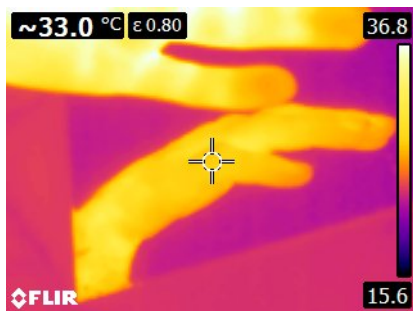
- T je „teplota“ záření (= teplota toho tělesa, které záření vyzařuje, nikoliv teplota tělesa, na které záření dopadá)

- např. „teplota“ slunečního záření je ≈ 6000 K
- „teplota“ záření vyzařovaného slunečním kolektorem je ≈ 320 K
- „teplota“ záření určuje pouze spektrální charakteristiku!!
- Pozor - termokamera neměří spektrální charakteristiku, ale celkovou intenzitu!!



Odražené záření

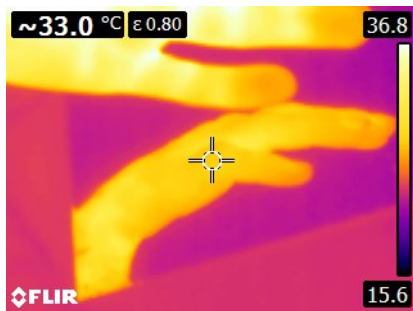
- Dopadající záření E je zčásti pohlceno ($E_p = a \cdot E$)
- zbytek, tedy $E_r = E - E_p$, se odrazí
- Porovnejme pomocí termokamery odraz ruky
 - 1 v zrcadle (tedy na skle s vysokou pohltivostí)
 - 2 na nerezovém plechu s nízkou pohltivostí



- plech odráží v IR oblasti výrazně lépe než sklo!

Odražené záření ovlivňuje termokameru

- Teplota plechu i zrcadla je stejná jako teplota místnosti (16°C)
- V místě odrazu ruky ale měřím podstatně vyšší teplotu
 - sklo odráží málo – zvýšení teploty je malé (asi o 5°C)
 - plech odráží více – měřím teplotu blízkou teplotě ruky (33°C)



POZOR: u matných povrchů si odrazu vůbec nevšimnete!

Příklad

- Mějme dva protilehlé rovinné povrchy o stejné teplotě $20\text{ }^{\circ}\text{C}$
 - jeden má emisivitu $\varepsilon = 0,8$ (omítnutá stěna)
 - druhý má emisivitu $\varepsilon = 0,1$ (plech)

Jaký bude tok tepla mezi těmito dvěma povrchy 🤔?

Kirchhoffův zákon

- Pro pohltivost a emisivitu obvykle platí tzv. Kirchhoffův zákon

$$a(T_1) = e(T_2) \text{ pro } |T_1 - T_2| < 1000 \text{ K}$$

Tabulka: Emisivita a pohltivost materiálů při různých teplotách

Teplota	≈ 300 K	≈ 6000 K
typ záření	IR	UV + viditelné + IR
materiál	$a(T) = e(T)$	
bílá barva	≈ 0,8	< 0,1
leštěný kov	< 0,1	≈ 0,1
sklo	0,84	transparentní
černá barva	≈ 0,8	> 0,9
selektivní absorbéry	≈ 0,05	≈ 0,95

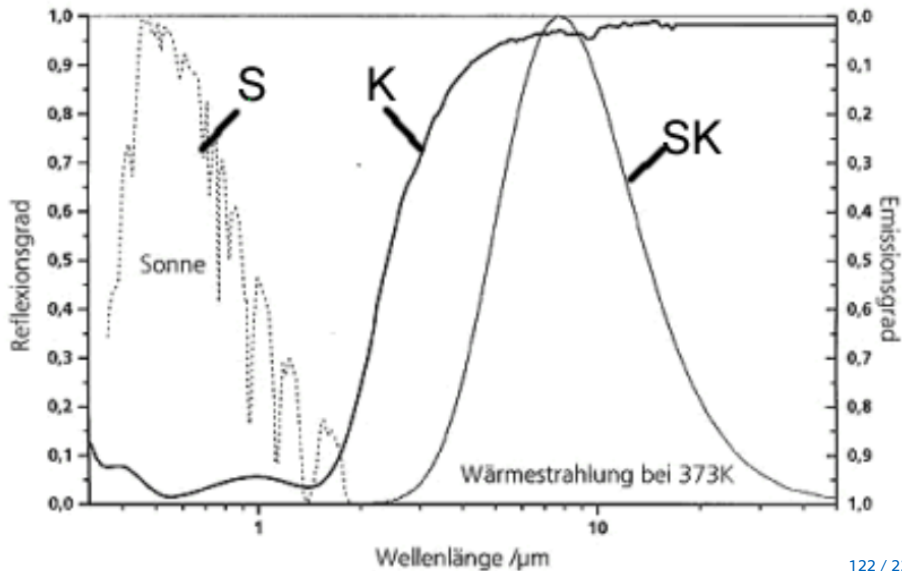
Selektivní absorbery pro solární kolektory

- Materiály, které mají vysokou pohltivost pro sluneční záření
⇒ vysoké využití slunečního záření
- nízkou pohltivost (a emisivitu!!!) pro infračervené záření
⇒ nízké tepelné ztráty

Tabulka: Emisivita a pohltivost některých selektivních absorberů

teplota	$\approx 350 \text{ K}$	$\approx 6000 \text{ K}$
typ záření	IR	UV + viditelné + IR
materiál	$a(T) = e(T)$	
$\text{Ni}_x\text{Al}_y\text{O}_z$	$\approx 0,1$	0,92 - 0,97
Crystal Clear™	0,04 - 0,09	0,94 - 0,96
TiNOX	$\approx 0,05$	$\approx 0,91$

TiNOX – selektivní absorbér pro sluneční kolektory



Dva protilehlé rovinné povrchy

vzduchová
mezera

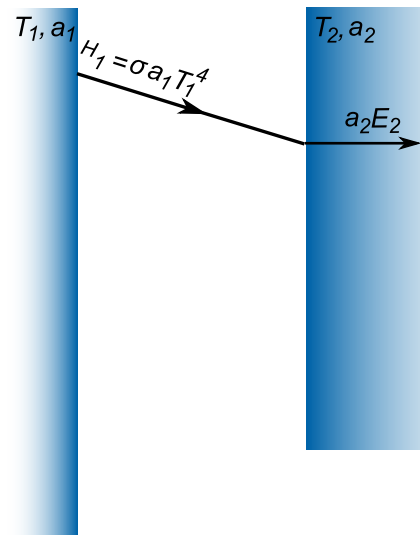
1. povrch
 T_1, a_1

2. povrch
 T_2, a_2

geometricky nejjednodušší
případ:

- nekonečně velké rovinné rovnoběžné povrchy
- povrch č.1 má teplotu T_1 , emisivitu a pohltivost a_1
- povrch č.2 má teplotu T_2 , emisivitu a pohltivost a_2
- předpokládáme blízké teploty, proto dle Kirchhoffova zákona
 $a_1 = e_1, a_2 = e_2$

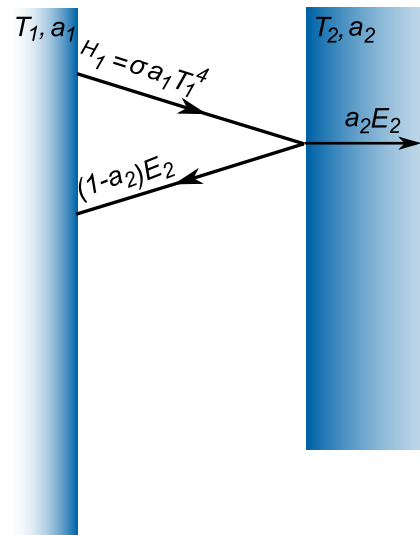
Dva protilehlé rovinné povrchy



Veškeré záření vyzařované
jedním povrchem dopadá na
protilehlý povrch

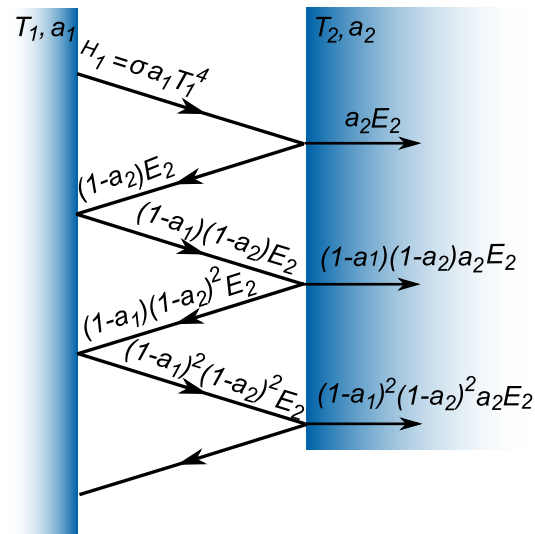
$$H_1 = E_2$$

Dva protilehlé rovinné povrchy



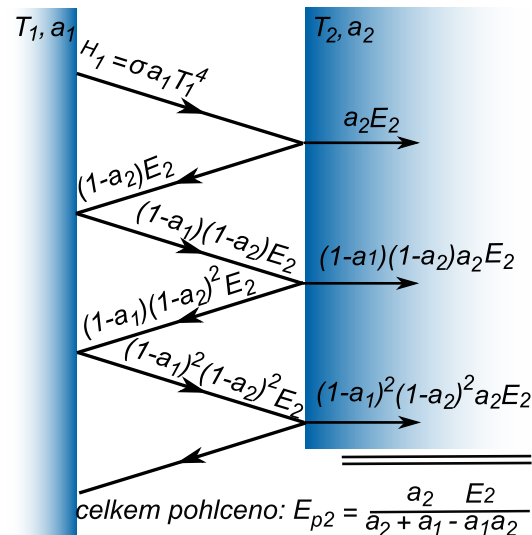
Pouze část dopadajícího záření E_2 se pohltí ($E_{p2} = a_2 E_2$), zbytek se odrazí

Dva protilehlé rovinné povrchy



Záření odražené od pravého povrchu se zčásti odrazí od levého a vrací se zpět...
A znovu a znovu...

Dva protilehlé rovinné povrchy



Celkem je pravým povrchem pohlceno (součet nekonečné geometrické řady):

$$E_{p2} = a_2 E_2 (1 + q + q^2 + \dots)$$

$$q = (1 - a_1)(1 - a_2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

$$E_{p2} = \frac{a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} E_2$$

Dva protilehlé rovinné povrchy

- máme tedy záření pohlcené pravým povrchem:

$$E_{p2} = \frac{a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} E_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} H_1 = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma T_1^4$$

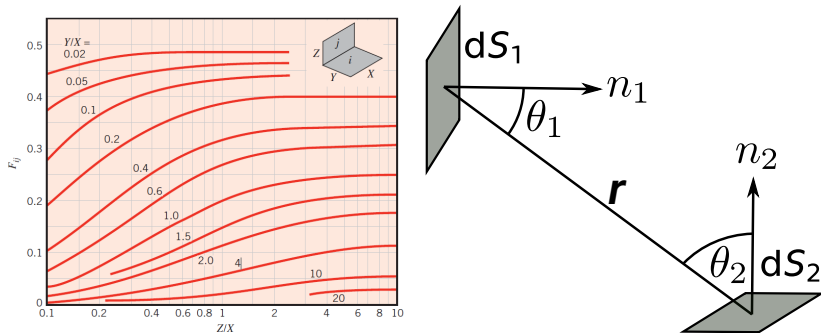
- zcela analogicky levý povrch pohlcuje záření emitované pravým povrchem:

$$E_{p1} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma T_2^4$$

- celkem radiční tok tepla (zleva doprava):

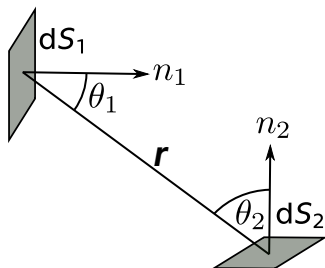
$$q_r = E_{p2} - E_{p1} = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

Obecná geometrie – úhlový či polohový faktor (View Factor)



- Úhlový faktor $F_{1 \rightarrow 2}$ – vyjadřuje jaká část záření emitovaného povrchem S_1 dopadá na povrch S_2
- Vypočteme ho integrací přes oba povrchy...

Obecná geometrie – úhlový faktor



- Integrujeme přes oba povrchy, tedy

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dS_2 dS_1 \quad (-)$$

- Reciproční vztah: $S_1 F_{1 \rightarrow 2} = S_2 F_{2 \rightarrow 1}$

- Sumační pravidlo: $\sum_{j=1}^n F_{1 \rightarrow j} = 1$ (Každá část záření vyzařovaného povrchem č. 1 nakonec někam dopadne.)

Speciálně – pokud se ozařují jen dvě tělesa

$$\Phi_r = -\frac{1}{\frac{1-a_1}{S_1 a_1} + \frac{1}{S_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1-a_2}{S_2 a_2}} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \text{ (W)}$$

■ Dvě protilehlé roviny

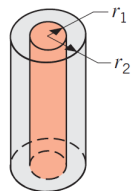
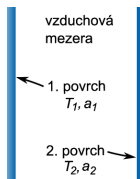
$$S_1 = S_2 \text{ a } F_{1 \rightarrow 2} = 1$$

$$\Phi_r = -S_1 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \text{ (W)}$$

■ Souosé válce

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ a } F_{1 \rightarrow 2} = 1$$

$$\Phi_r = -S_1 \frac{a_1 a_2 r_2}{a_1 r_1 + a_2 r_2 - a_1 a_2 r_1} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \text{ (W)}$$



Speciálně – pokud se ozařují **jen** dvě tělesa

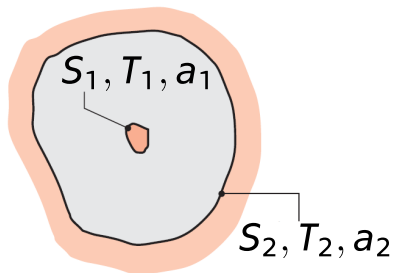
$$\Phi_r = -\frac{1}{\frac{1-a_1}{S_1 a_1} + \frac{1}{S_1 F_{1 \rightarrow 2}} + \frac{1-a_2}{S_2 a_2}} \sigma (T_2^4 - T_1^4) \text{ (W)}$$

■ Malé těleso ve velké dutině

$$\frac{S_1}{S_2} \rightarrow 0 \text{ a } F_{1 \rightarrow 2} = 1$$

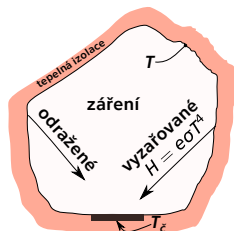
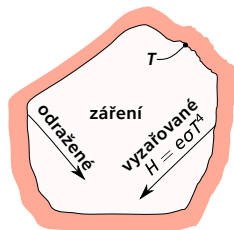
$$\Phi_r = -a_1 S_1 \sigma (T_2^4 - T_1^4) \text{ (W)}$$

- Na emisivitě dutiny nezáleží!
- Velká dutina se chová jako absolutně černé těleso!



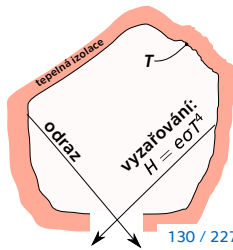
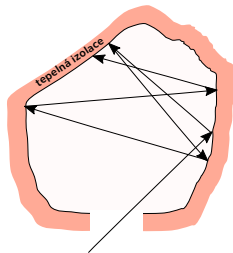
Záření v dutině

- V dutině, jejíž vnitřní povrchy jsou v termodynamické rovnováze,
- například jsou tepelně izolovány od okolí,
- je tepelné záření vždy stejné, nezávislé na emisivitě vnitřních povrchů.
- Pokud kousek vnitřního povrchu začerníme ($a = e = 1$), bude jeho teplota T_c stejná jako teplota ostatních povrchů (jsou v rovnováze).
- A protože to, co vyzařuje, musí být rovno tomu co pohlcuje, je zřejmé, že dopadající záření je záření černého tělesa o teplotě T .



Otvor do dutiny (okno, dveře)

- Otvor do dutiny se chová jako absolutně černé těleso:
- 1 Veškeré záření vstupující do dutiny je pohlceno díky mnohonásobným odrazům.
 - 2 Vystupující záření je záření černého tělesa o teplotě rovném teplotě vnitřních povrchů dutiny (viz předchozí slide).



Linearizace $T_2^4 - T_1^4$ (pro malé ΔT !!)

- Rozdíl čtvrtých mocnin teplot není pro výpočty praktický, proto výraz linearizujeme.
- Např. při použití Taylorova rozvoje

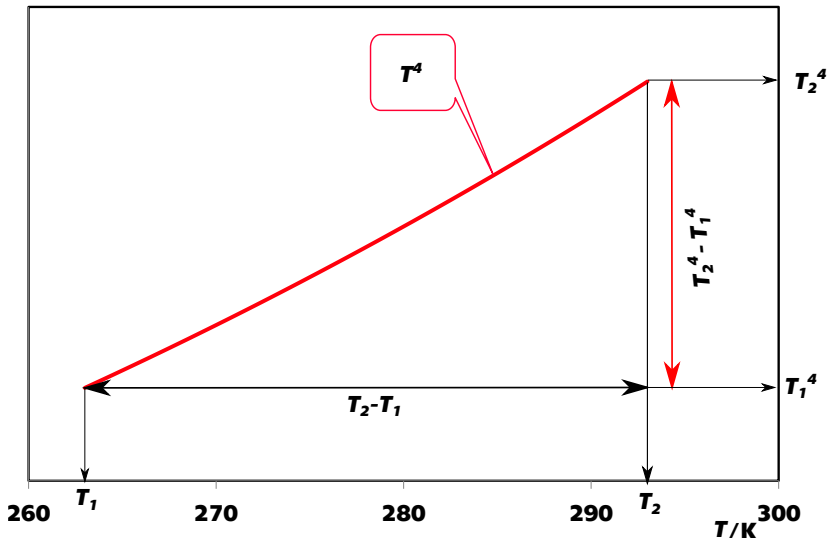
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

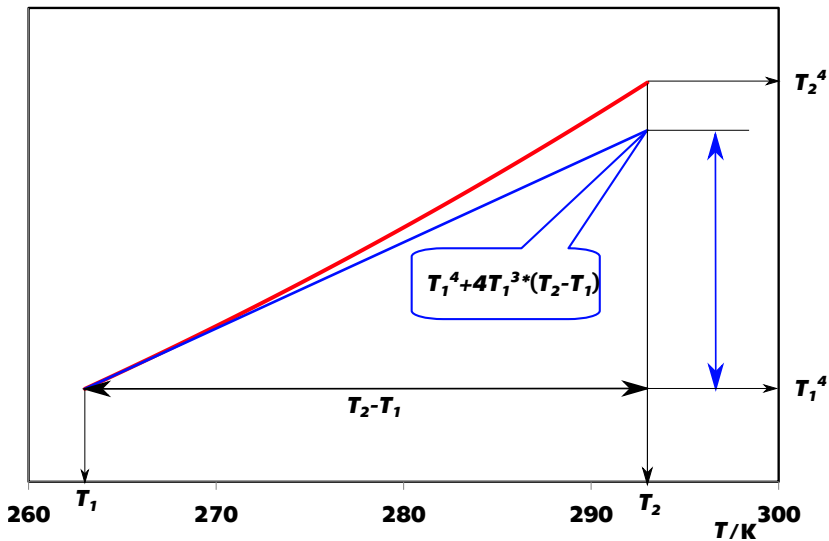
- V našem případě je $f(x) = T^4$
- Když použijeme jen první lineární člen rozvoje, máme

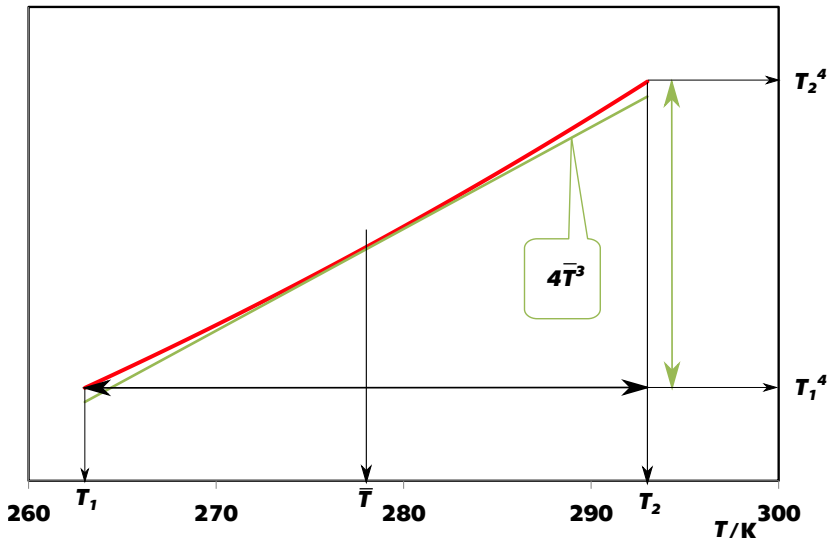
$$T_2^4 - T_1^4 \doteq 4T_1^3 (T_2 - T_1) \doteq 4\bar{T}^3 (T_2 - T_1) \doteq 4\bar{T}^3 (\theta_2 - \theta_1), \text{ kde } \bar{T} = \frac{T_2 + T_1}{2}$$

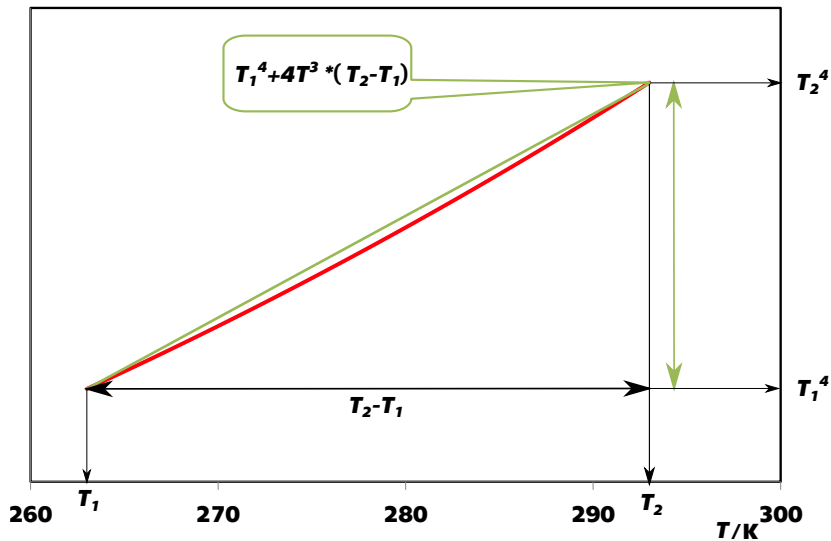
- Radiační tok tepla je konečně

$$q_r = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma 4\bar{T}^3 (\theta_2 - \theta_1)$$

Linearizace $T_2^4 - T_1^4$ 

Linearizace $T_2^4 - T_1^4$ 

Linearizace $T_2^4 - T_1^4$ 

Linearizace $T_2^4 - T_1^4$ 

Linearizace – součinitel přestupu tepla

- Tok tepla přenášeného zářením ve vzduchové mezeře q_r jsme vyjádřili

$$q_r = -\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma 4\bar{T}^3 (\theta_2 - \theta_1)$$

- Lze to napsat i jinak:

$$q_r = -h_r (\theta_2 - \theta_1)$$

- Porovnáním dostaneme

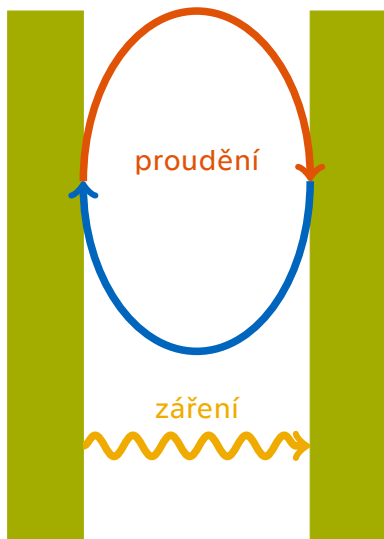
h_r - **radiační část součinitele přestupu tepla:**

$$h_r = 4 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma \bar{T}^3$$

- Při velkých rozdílech teplot není už linearizace přesná, pak raději pro h_r použijeme vztah:

$$h_r = \frac{-q_r}{(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{-\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma (T_2^4 - T_1^4)}{(\theta_2 - \theta_1)}$$

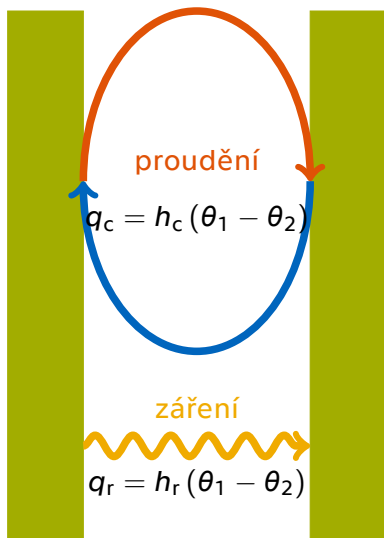
Přestup tepla ve vzduchové mezeře



- V mezeře je teplo přenášeno
 - zářením
 - a zároveň
 - konvekcí (prouděním vzduchu)
- q_c je konvekční část toku
- q_r je zářivá část toku
- Celkový tok tepla:

$$q_T = q_r + q_c = \underbrace{(h_r + h_c)}_{h_T} (\theta_1 - \theta_2)$$

Přestup tepla ve vzduchové mezeře



- V mezeře je teplo přenášeno
 - zářením
 - a zároveň
 - konvekcí (prouděním vzduchu)
- q_c je konvekční část toku
- q_r je zářivá část toku
- Celkový tok tepla:

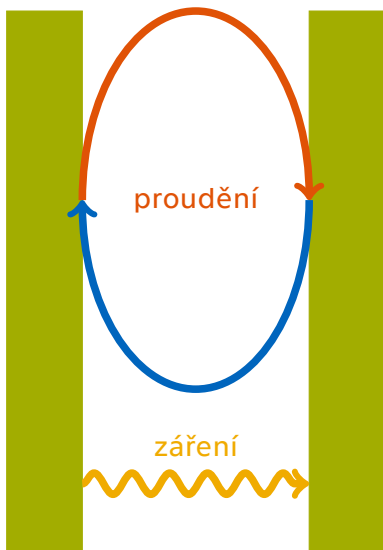
$$q_T = q_r + q_c = \underbrace{(h_r + h_c)}_{h_T} (\theta_1 - \theta_2)$$

Odpor při přestupu tepla vzduchovou mezerou R_g

- Celkový tok tepla vzduchovou mezerou je **součet** záření a proudění
- $q_T = q_r + q_c = (h_r + h_c)(\theta_1 - \theta_2) = h_T(\theta_1 - \theta_2) = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{R_g}$
- R_g je tepelný odpor vzduchové mezery a zjevně platí:

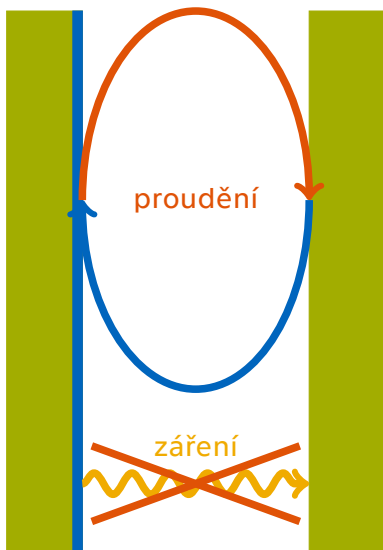
$$R_g = \frac{1}{h_r + h_c}$$

Snižování tepelných ztrát při přestupu tepla



- K přestupu tepla dochází
 - zářením
 - prouděním (vedením)
- Záření můžeme omezit
ale pozor:
- Proudění zůstává nezměněno

Snižování tepelných ztrát při přestupu tepla



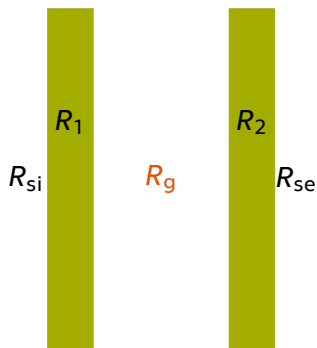
- K přestupu tepla dochází
 - zářením
 - prouděním (vedením)
- Záření můžeme omezit
ale pozor:
- Proudění zůstává nezměněno

Snižování zářivých tepelných ztrát

Jak můžeme omezit přestup tepla zářením?

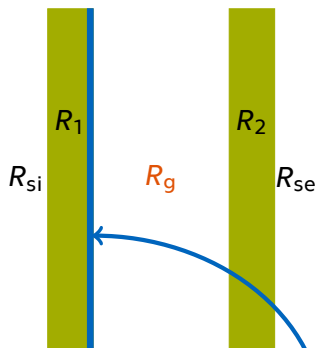
- 1 Snížením emisivity (pohltivosti) povrchů v IR oblasti
 - čisté kovové povrchy
 - kovové fólie (podstřešní fólie)
 - pokovené povrchy (izolační dvojskla)
- 2 Vložením přepážky (stínění) do mezery

Izolační dvojsklo



- Celkový tepelný odpor dvojskla je součtem všech odporů v sérii
- $R_T = R_{si} + R_1 + R_g + R_2 + R_{se}$
- emisivita skla $e = 0,837$
- odpor mezery R_g lze zvětšit pokovením!
- emisivita pokovení $e \simeq 0,05$

Izolační dvojsklo



- Celkový tepelný odpor dvojskla je součtem všech odporů v sérii
- $R_T = R_{si} + R_1 + R_g + R_2 + R_{se}$
- emisivita skla $e = 0,837$
- odpor mezery R_g lze zvětšit pokovením!
- emisivita pokovení $e \simeq 0,05$

V izolačních dvojsklech se pokovuje vnitřní plocha skla na teplé straně.

Izolační dvojsklo - efekt pokovení

■ Odpory které se pokovením nemění:

- $R_{se}, R_{si}, 2 \times$ odpor skla, $R_1 + R_2 = \frac{0,004}{1} + \frac{0,004}{1}$

- Součinitel přestupu prouděním h_c se také **téměř** nemění

- při šířce mezery mezi skly $d = 12$ mm nedochází k proudění
proto $h_c = \frac{\lambda}{d} = \frac{0,025}{0,012} = 2,1 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$

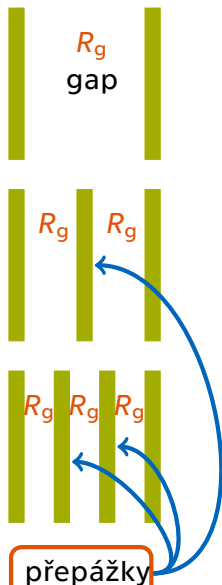
■ součinitel přestupu h_r je silně ovlivněn pokovením povrchu

$$h_r = 4 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \sigma \bar{T}^3$$

Izolační dvojsklo - efekt pokovení

Domácí úkol...

Radiační stínění ve vakuové mezeře



- Uvažujme vakuum → sdílení tepla **pouze zářením**
- Předpokládejme že emisivita všech povrchů je stejná
- Pak tepelný odpor mezery $R_g = \frac{1}{h_r} = \left(4 \frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \sigma \bar{T}^3\right)^{-1}$
- Po vložení stínění je tepelný odpor **každé** mezery rovněž přibližně R_g .
- Celkový odpor je tedy $R_{gT} = (n + 1) \cdot R_g$, kde n je počet přepážek
- Ve vakuu je radiální stínění velmi účinné!

Radiační stínění ve vakuové mezeře mezi dvěma hliníkovými foliemi

Numericky pro $\theta_1 = 2,5\text{ }^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 17,5\text{ }^\circ\text{C}$, $e = 0,05$

Bez stínění: $\bar{\theta} = 10\text{ }^\circ\text{C}$

$$R_g = \left(4 \frac{0,05}{2 - 0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 283^3 \right)^{-1} = \frac{1}{0,131} = 7,6 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

Jedna přepážka: $\bar{\theta}_1 = 6,25\text{ }^\circ\text{C}$, $\bar{\theta}_2 = 13,75\text{ }^\circ\text{C}$

$$R_{g1} = \left(4 \frac{0,05}{2 - 0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 279^3 \right)^{-1} = 7,92 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

$$R_{g2} = \left(4 \frac{0,05}{2 - 0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 287^3 \right)^{-1} = 7,27 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

$$R_{gT} = R_{g1} + R_{g2} = 7,92 + 7,27 = 15,19 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1} = 2R_g$$

Radiační stínění ve vzduchové mezeře mezi dvěma hliníkovými foliemi

- Ve vzduchové mezeře se na šíření tepla podílí i proudění
- Předpokládejme úzkou mezeru - k proudění nedochází
- Pak tepelný odpor mezery $R_g = \frac{1}{h_r+h_c} = \left(4\frac{e}{2-e}\sigma T^3 + \frac{\lambda}{d}\right)^{-1}$
- Po vložení přepážky doprostřed je tepelný odpor **každé** mezery $R'_g = \left(4\frac{e}{2-e}\sigma \bar{T}^3 + \frac{\lambda}{d/2}\right)^{-1}$
- a celkový odpor $R_{gT} = R'_{g1} + R'_{g2}$

Radiační stínění ve vzduchové mezeře

Bez stínění

$$\blacksquare R_g = \left(4 \frac{0,05}{2-0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 283^3 + \frac{0,025}{0,012} \right)^{-1} = 0,451 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

Jedna přepážka (další hliníková fólie)

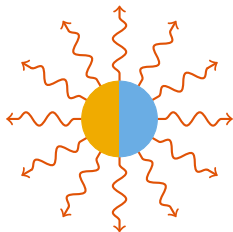
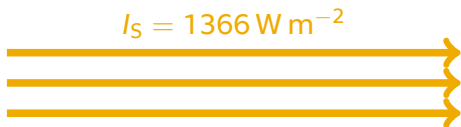
$$\blacksquare R'_{g1} = \left(4 \frac{0,05}{2-0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 279^3 + \frac{0,025}{0,006} \right)^{-1} = 0,233 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

$$\blacksquare R'_{g2} = \left(4 \frac{0,05}{2-0,05} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 287^3 + \frac{0,025}{0,006} \right)^{-1} = 0,232 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$$

$$\blacksquare R_{gT} = 0,233 + 0,232 = 0,465 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1} = 1,03 R_g$$

Rovnovážná teplota Země (bez atmosféry)

- Vypočtete rovnovážnou teplotu Země T_Z za těchto předpokladů
 - nemá atmosféru
 - nemá vnitřní zdroje tepla
 - intenzita záření Slunce je $I_S = 1366 \text{ W m}^{-2}$
 - pohltivost zemského povrchu pro sluneční záření je $a = 0,7$
 - emisivita zemského povrchu v IR oblasti je $e = 0,97$



Rovnovážná teplota Země (bez atmosféry)



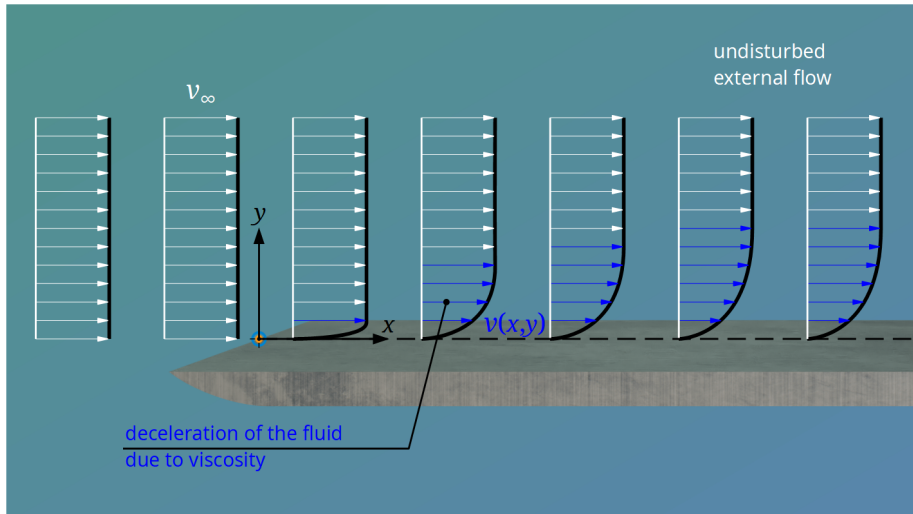
■ Řešení

- V rovnováze příkon = výkon $P_{in} = P_{out}$
- tepelný **příkon** Země je $P_{in} = I_S \cdot a \cdot \pi R_Z^2$
- tepelný **výkon** Zemského povrchu je $P_{out} = 4\pi R_Z^2 \cdot e \cdot \sigma T_Z^4$
- odtud $T_Z = \sqrt[4]{\frac{I_S a}{4e\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1366 \cdot 0,7}{4 \cdot 0,97 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}} = 256,8 \text{ K} = -16,3 \text{ °C}$

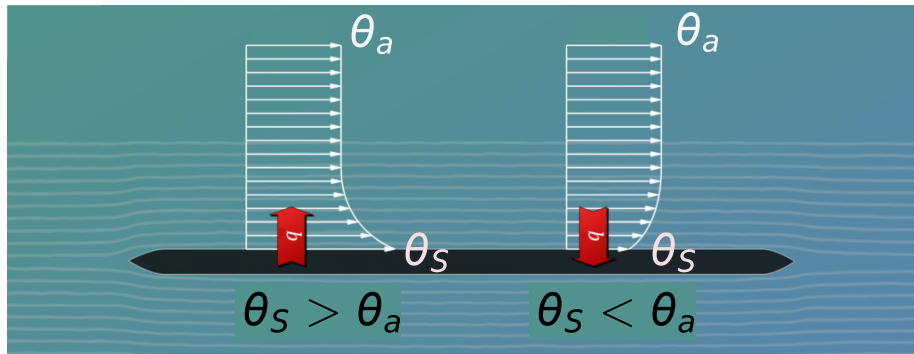
Sdílení tepla prouděním

- K transportu tepla slouží pohybující se hmota
- Nedílnou součástí je ale i transport tepla vedením
 - z povrchu do tekutiny
 - z jedné vrstvy tekutiny do jiné
- Proudění je
 - nucené (ventilátor, vítr)
 - přirozené, samotížné (způsobené rozdílem teplot)

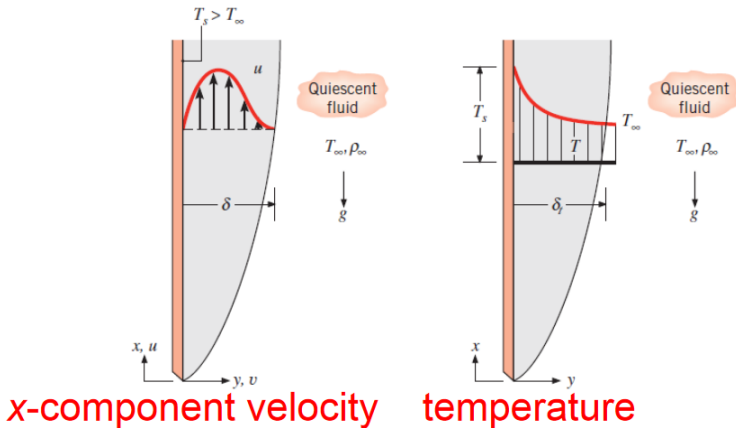
Mezní vrstva při proudění



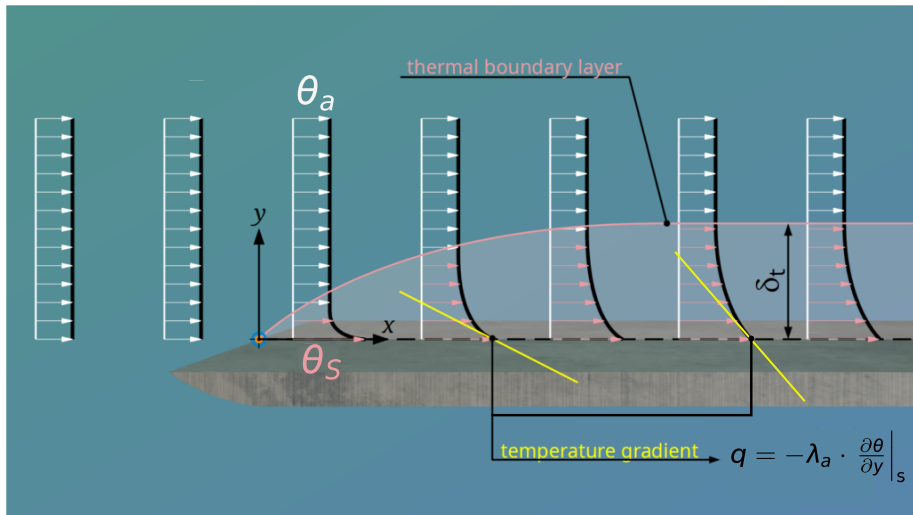
Tepelná mezní vrstva při proudění



Mezní vrstva při samotížném proudění



Tepelná mezní vrstva při proudění



Tepelný tok na rozhraní stěna/vzduch

- Hustotu tepelného toku chceme vyjádřit pomocí vztahu

$$q = h_c (\theta_s - \theta_a)$$

- Blízko stěny se vzduch nepohybuje, proto se teplo sdílí jen vedením:

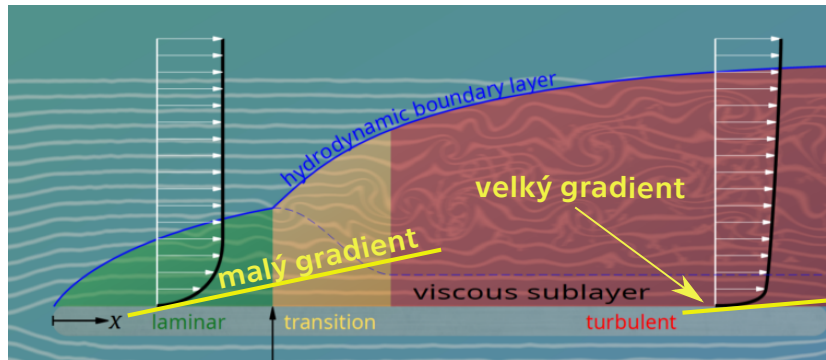
$$q = -\lambda_a \cdot \left. \frac{\partial \theta_a}{\partial y} \right|_s$$

- Porovnáním:

$$h_c = \frac{-\lambda_a \cdot \left. \frac{\partial \theta_a}{\partial y} \right|_s}{(\theta_s - \theta_a)}$$

- Součinitel přestupu je tím větší, čím je větší gradient teploty u povrchu!

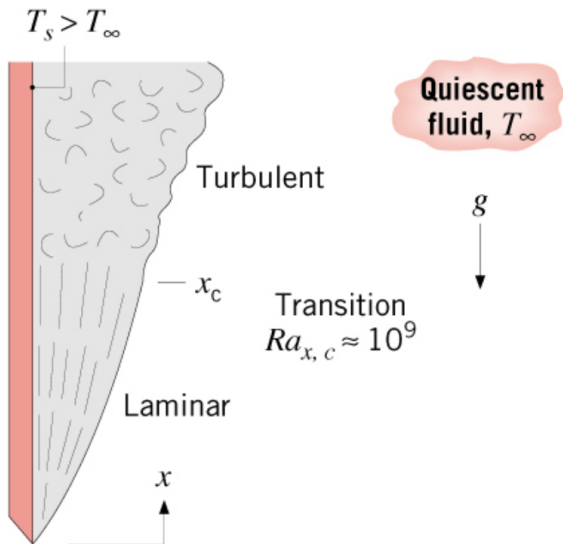
Turbulentní proudění



Turbulence zvýší gradient rychlosti a hlavně teploty

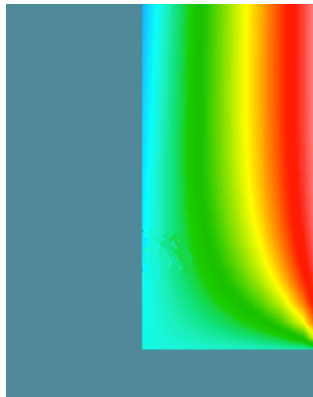
⇒ $h_{c,loc}$ je vyšší

Turbulentní proudění při samotížném proudění



Lokální součinitel přestupu tepla $h_{c,loc}$

- Gradient teploty u povrchu se mění \implies mění se i h_c !
- Lokální hodnota součinitele přestupu $h_{c,loc}$ je důležitá např. při posuzování rizika kondenzace na povrchu (např. rohy, kouty)



Střední hodnota součinitele přestupu tepla $\overline{h_c}$

- Střední hodnota přes celou plochu ($\overline{h_c}$) je vhodná pro výpočet tepelných ztrát

$$\Phi = \int_S q_{\text{loc}} \, dS = (\theta_s - \theta_a) \int_S h_{c,\text{loc}} \, dS$$

$$\overline{h_c} = \frac{1}{S} \int_S h_{c,\text{loc}} \, dS$$

Nucené proudění



ČSN EN ISO 6946

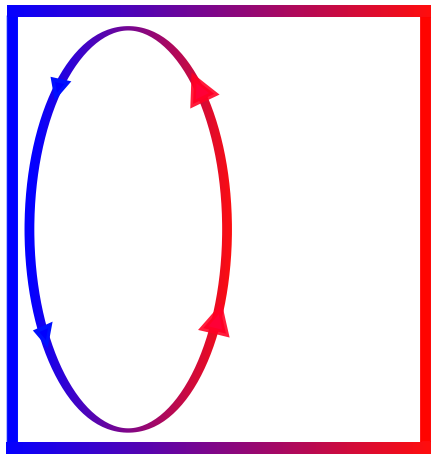
$$h_{ce} = 4 + 4v,$$

kde v je rychlost větru

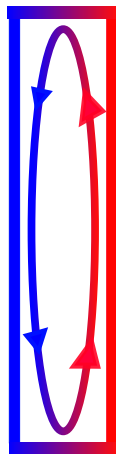
Ventilátory
a vzduchotechniku rád
přenechám expertům z TZB

Součinitel přestupu tepla
na vnější straně konstrukce.

Přirozené, samotížné proudění



Přestup svislá stěna–interiér
(vnitřní povrch obálky budovy)



Přestup stěna–stěna
(vzduch. mezera)

Přirozené, samotížné proudění

Šíření tepla přirozeným prouděním (konvekci) je komplexní děj, k jehož modelování se používá několik přístupů:

Numerické řešení

Řešení soustavy diferenciálních rovnic popisujících konvekci (pomocí specializovaného softwaru).

Teorie podobnosti

- Přenos tepla se experimentálně určí jen v určitých případech a pomocí teorie podobnosti přepočte na jiné geometricky a fyzikálně „podobné“ případy.
- Zda jsou si situace podobné, lze určit pomocí podobnostních čísel (kritérií).

Přirozené proudění – numerické řešení

- Pro řešení je třeba sestavit bilanční rovnice
 - bilanci energie
 - bilanci hmoty
 - bilanci hybnosti
 - bilanci momentu hybnosti
- K tomu je třeba znát a napsat
 - stavovou rovnici proudícího média
 - závislost materiálových vlastností média na stavových parametrech
- Máme tedy soustavu mnoha rovnic, které je třeba řešit **současně**.
 - to není jednoduchý úkol, nicméně software, který to umí, existuje...

Teorie podobnosti

Situace můžeme považovat za geometricky a fyzikálně podobné v případě, že se rovnají jejich **Nusseltova čísla**, definovaná jako:

Nusseltovo číslo

$$Nu = \frac{h_c l}{\lambda}$$

- λ – součinitel tepelné vodivosti tekutiny
- l – „charakteristický rozměr“ obtékaného povrchu

Číslo vyjadřuje poměr konvektivního a konduktivního přenosu tepla ve směru kolmém na obtékaný povrch

Teorie podobnosti

- Známe-li Nusseltovo číslo Nu pro danou situaci, pak součinitel přestupu tepla při konvekci (h_c) určíme ze vtahu:

Určení h_c ze známého Nusseltova čísla

$$h_c = \frac{Nu \lambda}{l} \quad (\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}) \quad (2)$$

- Nusseltovo číslo může být **lokální** nebo **střední** přes celou plochu, přes kterou probíhá tepelná výměna.
- Dále v textu uvádíme jen střední hodnoty \overline{Nu} .

Rayleighovo číslo

Empirické vztahy pro Nusseltovo číslo (3, 4) obsahují Rayleighovo číslo

$$Ra = \frac{g\Delta T l^3}{\bar{T} \nu a},$$

ve kterém g je gravitační zrychlení, ΔT je rozdíl teploty mezi povrchem a tekutinou, \bar{T} je střední teplota mezní vrstvy (průměrná teplota určená z teploty povrchu a tekutiny), l je výška stěny (světlost místnosti), ν kinematická viskozita a a je součinitel teplotní vodivosti proudící tekutiny, tedy vzduchu.

- Je-li Rayleighovo číslo malé – tekutina neproudí.
- Větší – tekutina proudí laminárně.
- Ještě větší – proudí turbulentně.

Přestup svislá stěna – vzduch

Nusseltovo číslo mnoho experimentátorů měřilo s různými tekutinami a v různých geometriích. Další autoři pak experimentální data „fitují“ nějakou vhodnou funkcí. Např. [6]:

Laminar and turbulent free convection from a vertical plate

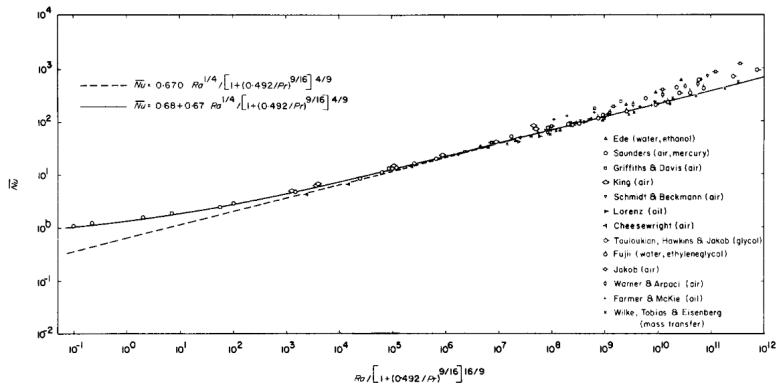


FIG. 1. Correlating equations for the laminar regime of isothermal, vertical plates.

Přestup svislá stěna – vzduch [6]

Empirické vztahy pro Nusseltovo číslo

$$\overline{Nu} = 0,68 + \frac{0,670 \cdot Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + (0,492/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}} \quad (\text{pro } Ra < 10^9, \text{ laminární})$$

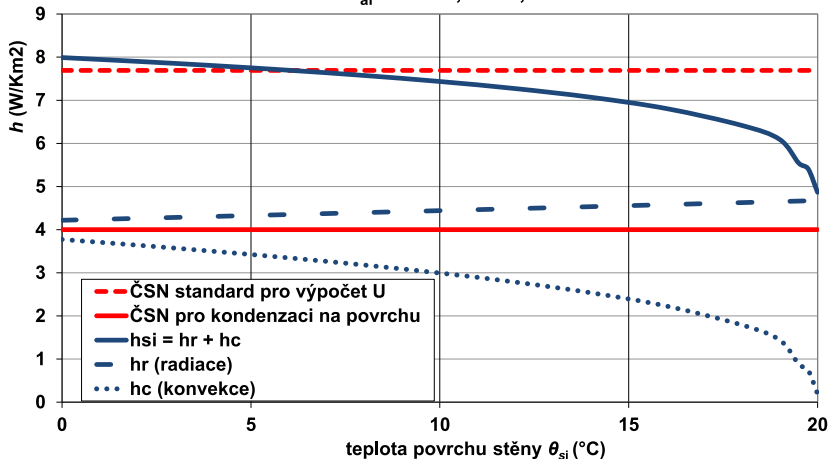
$$\overline{Nu} = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 \cdot Ra^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + (0,492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} \right\}^2 \quad (\text{pro } Ra > 10^9, \text{ turbulent.})$$

(3)

kde Prandtovo číslo $Pr = 0,718$

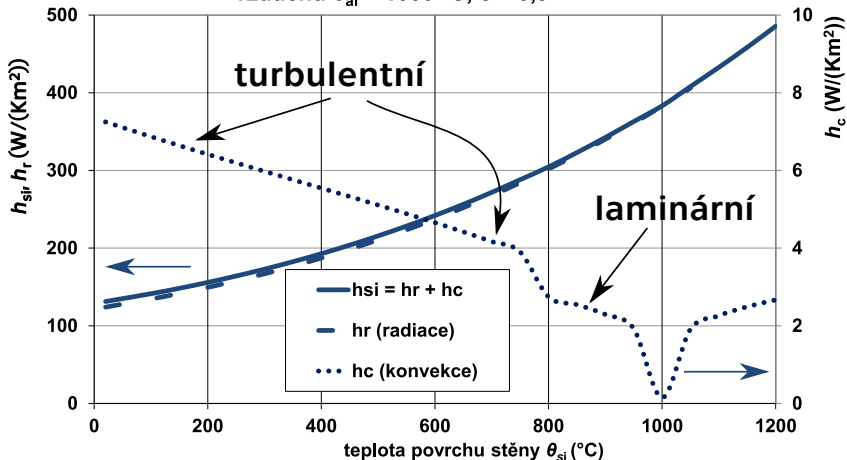
Přestup svislá stěna – vzduch (h_{si})

Součinitelé přestupu tepla stěna – vzduch při teplotě
vzduchu $\theta_{ai} = 20\text{ °C}$, $e = 0,9$



Přestup svislá stěna – vzduch (h_{si}) při $\theta \approx 1000\text{ °C}$

Součinitelé přestupu tepla stěna – vzduch při teplotě vzduchu $\theta_{ai} = 1000\text{ °C}$, $e = 0,9$



Přestup stěna – stěna (vzduchová mezera)

Pro přestup tepla mezi dvěma svislými stěnami oddělenými vzduchovou mezerou platí jiné empirické vztahy, např.

Empirické vztahy pro Nusseltovo číslo

$$\overline{Nu} = 1 \quad \left(\text{pro } Ra < 124 \frac{a}{v} \left(0,952 + \frac{a}{v} \right) \frac{h}{l} \right)$$

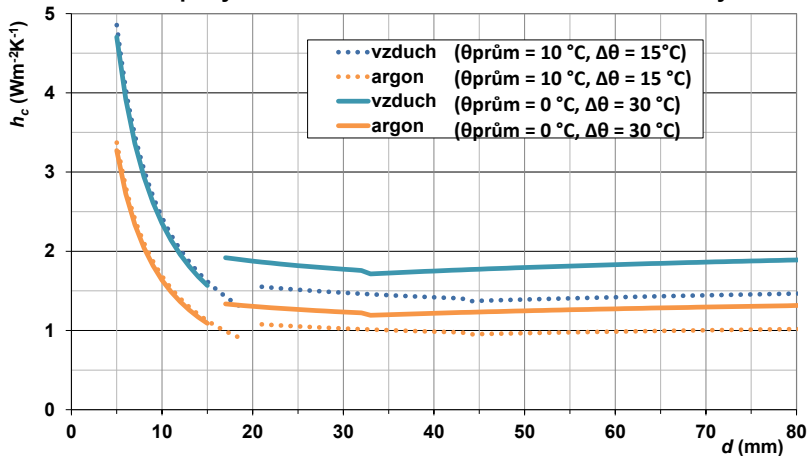
$$\overline{Nu} = 0,19 \cdot Ra^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{l}{h} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (\text{pro } 15000 \leq Ra < 150000) \quad (4)$$

$$\overline{Nu} = 0,071 \cdot Ra^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{l}{h} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (\text{pro } 150000 \leq Ra < 7200000)$$

V rovnicích je l šířka, h výška vzduchové mezery.

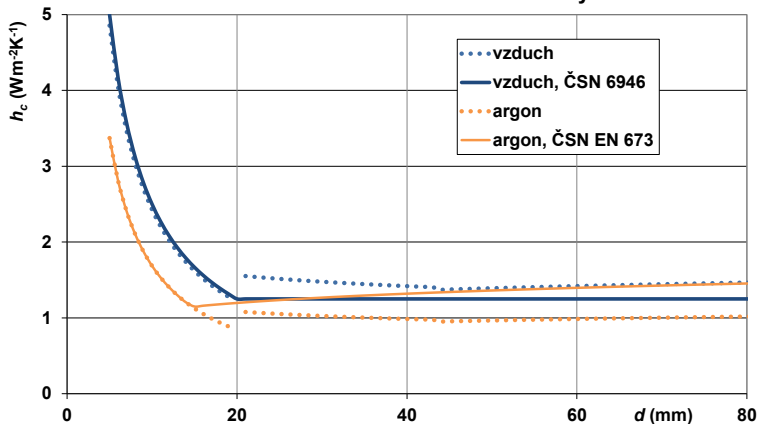
Příklad vypočtených součinitelů $h_c = Nu \cdot \frac{\lambda}{l}$

Konvekční část h_c součinitele přestupu tepla pro různé plyny a teploty ve svislé vzduchové mezeře mezi dvěma skly



Porovnání výpočtu h_c se vztahy z ČSN

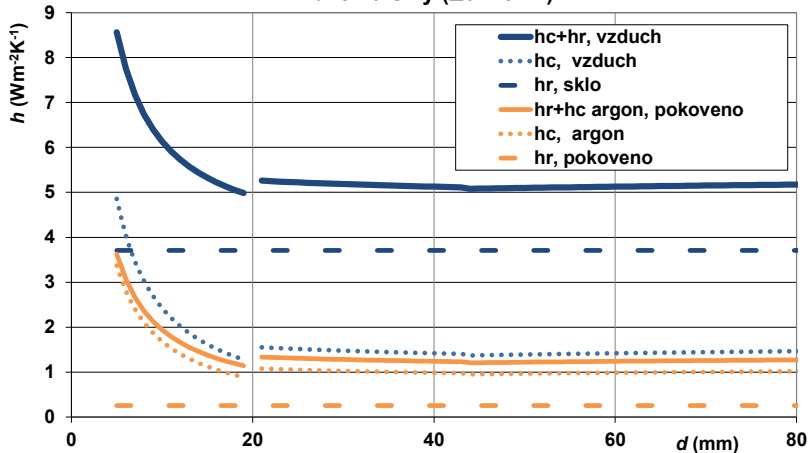
Konvekční část h_c součinitele přestupu tepla pro různé plyny ve svislé vzduchové mezeře mezi dvěma skly dle ČSN.



Vztahy uváděné v normách jsou jen přibližné!

Přestup tepla v mezeře mezi skly

Součinitel přestupu tepla ve svislé vzduchové mezeře mezi dvěma skly ($\Delta\theta=15\text{ °C}$)

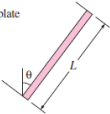

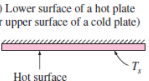

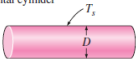


U trojskla – vliv šířky mezery a plynu

Srovnání hodnot U_g a g u izolačního trojskla

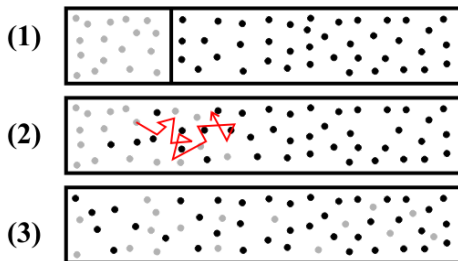
SOLOŽENÍ	HODNOTA U_g (W/m ² K)
4 mm PLANITHERM FUTUR N 8 mm Krypton 4 mm PLANILUX 8 mm Krypton 4 mm PLANITHERM FUTUR N	0,7
4 mm PLANITHERM FUTUR N 10 mm Krypton 4 mm PLANILUX 10 mm Krypton 4 mm PLANITHERM FUTUR N	0,6
4 mm PLANITHERM FUTUR N 12 mm Krypton 4 mm PLANILUX 12 mm Krypton 4 mm PLANITHERM FUTUR N	0,5
4 mm PLANITHERM FUTUR N 12 mm Argon 4 mm PLANILUX 12 mm Argon 4 mm PLANITHERM FUTUR N	0,7
4 mm PLANITHERM FUTUR N 16 mm Argon 4 mm PLANILUX 16 mm Argon 4 mm PLANITHERM FUTUR N	0,6

Nusseltovo číslo v dalších geometriích

<p>Inclined plate</p> 	<p>L</p>		<p>Use vertical plate equations for the upper surface of a cold plate and the lower surface of a hot plate</p> <p>Replace g by $g \cos \theta$ for $Ra < 10^9$</p>
<p>Horizontal plate (Surface area A and perimeter p) (a) Upper surface of a hot plate (or lower surface of a cold plate)</p>  <p>(b) Lower surface of a hot plate (or upper surface of a cold plate)</p> 	<p>A_s/p</p>	<p>10^4-10^7 10^7-10^{11}</p> <p>10^5-10^{11}</p>	<p>$Nu = 0.54Ra_L^{1/4}$ (9-22) $Nu = 0.15Ra_L^{1/3}$ (9-23)</p> <p>$Nu = 0.27Ra_L^{1/4}$ (9-24)</p>
<p>Vertical cylinder</p> 	<p>L</p>		<p>A vertical cylinder can be treated as a vertical plate when</p> $D \geq \frac{35L}{Gr_L^{1/4}}$
<p>Horizontal cylinder</p> 	<p>D</p>	<p>$Ra_D \leq 10^{12}$</p>	<p>$Nu = \left\{ 0.6 + \frac{0.387Ra_D^{1/6}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$ (9-25)</p>

Šíření hmoty difúzí

- Při difúzi proniká hmota hmotou (složka směsi proniká směsí).
- Hmota se šíří bez pozorovatelného makroskopického pohybu.
- Hnací silou difúze je
 - spád (gradient) počtu molekul v jednotce objemu
 - vyjadřuje se také pomocí koncentrace či parciálního tlaku.



Fickův zákon

$$\vec{g} = -D \cdot \text{grad } \varphi$$

- \vec{g} je tok materiálu (množství $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$)
- D je součinitel difúze ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
- φ je **množství** materiálu v jednotce objemu (množství m^{-3})
konkrétně například kg m^{-3} , mol m^{-3} ...
- Původně empirický zákon
 - později odvozen v rámci statistické termodynamiky.

Analogie difúze a transportu tepla

Difúze se řídí Fickovým zákonem, který je velmi podobný Fourierovu zákonu, který popisuje šíření tepla vedením:

- Fickův zákon: $\vec{g} = -D \cdot \text{grad}\varphi$
- Fourierův zákon: $\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}\theta$
- Způsob řešení je tedy velmi podobný.
- Při vedení tepla většinou neuvažujeme vnitřní zdroje tepla!!!
- Při šíření vodní páry jsou vnitřní zdroje naopak to, co nás nejvíc zajímá
 - Vysychání - zdrojem vodní páry je odpařování kapalné vlhkosti
 - Kondenzace - vodní pára zaniká (zdroj je tedy záporný)

Difúze vodní páry ve vzduchu

- 1 Množství vodní páry vyjádříme v molech (n_v), pak $\varphi_v = \frac{n_v}{V}$ a Fickův zákon:

$$\vec{g}_v = -D \cdot \text{grad } \varphi_v \text{ (mol m}^{-2} \text{ s}^{-1}\text{)}$$

- 2 Z **praktických důvodů** tok páry vyjádříme raději v $\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$:
rovnici z bodu 1 upravíme
přenásobením molární hmotností μ_v vody

$$\vec{g}_v = -D \cdot \mu_v \cdot \text{grad } \varphi_v \text{ (kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}\text{)} \quad (5)$$

Difúze vodní páry ve vzduchu

- Využijeme toho, že vzduch se chová víceméně jako ideální plyn, řídí se tedy stavovou rovnicí $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$,
- tlak je tedy určen jen počtem molekul v daném objemu.
- Tzv. parciální tlak je pak dobrý způsob jak vyjádřit podíl molekul dané látky v plynné směsi,
- pro vodní páru ve vzduchu

$$\frac{p_v}{p} = \frac{n_v}{n}.$$

- Látkové množství n_v lze pak vyjádřit pomocí parciálního tlaku vodní páry

$$n_v = \frac{p_v}{p} n.$$

Difúze vodní páry ve vzduchu

- Množství páry v jednotce objemu vyjádříme

$$\varphi_v = \frac{n_v}{V} = \frac{p_v}{R \cdot T}$$

- Dosadíme do Fickova zákona

$$\vec{g}_v = -D \cdot \mu_v \cdot \text{grad } \varphi_v \quad (\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

- Za **předpokladu konstantní teploty** dostáváme nový tvar Fickova zákona:

Fickův zákon pro vodní páru ve vzduchu

$$\vec{g}_v = -\delta_0 \cdot \text{grad } p_v \quad (\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}) \quad (6)$$

kde $\delta_0 = \frac{D \cdot \mu_v}{R \cdot T}$ je **součinitel difúzní vodivosti**

Součinitel difúzní vodivosti δ_0 páry ve vzduchu

- Součinitel difúzní vodivosti δ_0 vodní páry ve vzduchu závisí na teplotě a tlaku.
- Pro stavební výpočty se obvykle uvažuje hodnota, která zhruba odpovídá teplotě 10 °C a normálnímu tlaku:

$$\delta_0 \doteq 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Příklad – vysychání mokré stěny difúzí

Zadání

- Předpokládejme, že mokrá stěna vysychá jen difúzí (žádné proudění vzduchu)
- Teplota stěny i okolí je stejná $\theta = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$
- Ve vzdálenosti $l = 1\text{ m}$ je relativní vlhkost $\varphi = 40\%$

Příklad – vysychání mokré stěny difúzí

Řešení

- Tlak sytých par při teplotě 20 °C je $p_s = 2339 \text{ Pa}$
- U mokré stěny bude parciální tlak vodní páry $p_1 = p_s$
- Ve vzdálenosti l bude parciální tlak vodní páry $p_2 = \varphi \cdot p_s$
- Difúzní tok vodní páry bude

$$g_v = \delta_0 \frac{\Delta p}{l} = \delta \frac{p_1 - p_2}{l} = \delta_0 \frac{p_s \cdot (1 - \varphi)}{l}$$

$$g_v = 2 \cdot 10^{-10} \frac{2339 \cdot (1 - 0,4)}{1} = 2,81 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

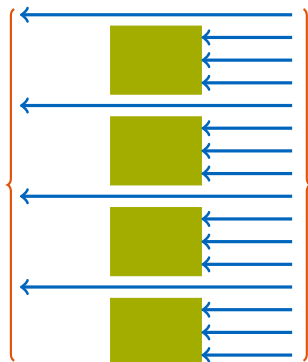
$$g_v \doteq 1 \text{ g m}^{-2} \text{ h}^{-1}$$

Difúze vodní páry v porézním materiálu

v materiálu:

$$\vec{g}'_v = \frac{S_p}{S} \vec{g}_v$$

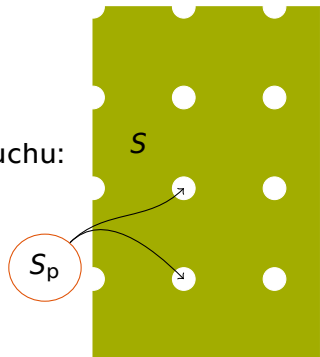
$$\vec{g}'_v = \frac{\vec{g}_v}{\mu}$$



řez

ve vzduchu:

$$\vec{g}_v$$



nárys

V tomto zjednodušeném modelu dochází k difúzi vodní páry stejně jako ve vzduchu, ale jen průřezem pórů. Faktor difúzního odporu tak vyjadřuje podíl celkové plochy k ploše řezu pórů $\mu = \frac{S}{S_p}$.

Faktor difúzního odporu μ

- Vyjadřuje kolikrát je materiál méně propustný než vzduch
- Představa z předešlého sletu platí jen pro materiály s velkými póry (např. pro izolační materiály).

$$\vec{g}_v = -\frac{\delta_0}{\mu} \cdot \text{grad } p_v \quad (\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

- Ale používá se pro jednoduchost i u jiných materiálů!
- Pak je nutno vzít v úvahu, že μ závisí na vlhkosti vzduchu i materiálu!
- Podíl $\delta = \frac{\delta_0}{\mu}$ se nazývá **součinitel difúzní vodivosti materiálu** a je často uváděn v tabulkách materiálových vlastností stavebních materiálů.

Ekvivalentní difúzní tloušťka S_d

- U některých tenkých materiálů difúzní odpor závisí na tloušťce **nelineárně** (případně tloušťka není všude stejná)!
- Faktor difúzního odporu pak ztrácí smysl.
- Používá se ekvivalentní difúzní tloušťka S_d .
- Je to tloušťka vzduchu o stejném difúzním odporu.
- Fickův zákon má pak tvar:

$$\vec{g}_v = -\frac{\delta_0}{S_d} \Delta p_v \quad (\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1})$$

Difúzní vlastnosti některých materiálů

materiál	μ (-)	δ (10^{-9} s)	S_d (m)
beton	17 až 32	0,006 až 0,01	-
omítka vápenná	6	0,033	-
polystyren pěnový	50	0,004	
polystyren XPS	100	0,002	
minerální vlna	1 až 3		
dřevo měkké kolmo k vláknům	až 150		
dřevo měkké podél vláken	4,5		
fólie podstřešní			0,02 až 0,04
fólie parotěsné			~ 1 až 100
fasádní nátěry			~ 0,1 až 0,2

Bilance páry v elementární krychli (1D tok)

- difúze **jen ve směru osy x** \Rightarrow

- Fickův zákon má tvar:

$$g_v(x) = -\delta \frac{dp_v}{dx}$$

- $g_v(x)$ je funkcí souřadnice x !

- za čas $\Delta\tau$ plochou S do krychle přiteče

- zleva: $g_v(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$

- zprava: $-g_v(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$

- ve vrstvě zůstane:

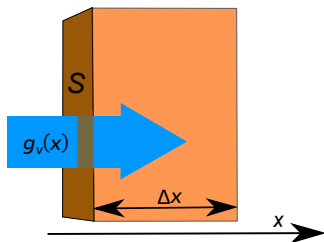
Bilance páry v elementární krychli (1D tok)

- difúze **jen ve směru osy x** \Rightarrow

- Fickův zákon má tvar:

$$g_v(x) = -\delta \frac{dp_v}{dx}$$

- $g_v(x)$ je funkcí souřadnice x !
- za čas $\Delta\tau$ plochou S do krychle přiteče
 - **zleva:** $g_v(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
 - zprava: $-g_v(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
 - ve vrstvě zůstane:



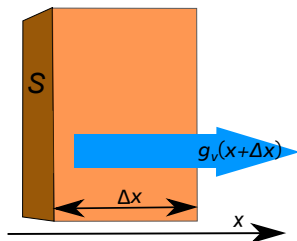
Bilance páry v elementární krychli (1D tok)

- difúze **jen ve směru osy x** \Rightarrow

- Fickův zákon má tvar:

$$g_v(x) = -\delta \frac{dp_v}{dx}$$

- $g_v(x)$ je funkcí souřadnice x !
- za čas $\Delta\tau$ plochou S do krychle přiteče
 - zleva: $g_v(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
 - **zprava:** $-g_v(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$
 - ve vrstvě zůstane:



Bilance páry v elementární krychli (1D tok)

- difúze **jen ve směru osy x** \Rightarrow

- Fickův zákon má tvar:

$$g_v(x) = -\delta \frac{dp_v}{dx}$$

- $g_v(x)$ je funkcí souřadnice x !

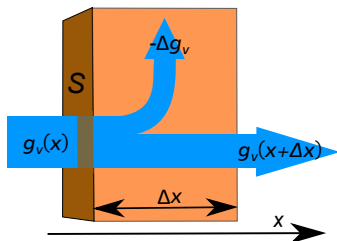
- za čas $\Delta\tau$ plochou S do krychle přiteče

- zleva: $g_v(x) \cdot \Delta\tau \cdot S$

- zprava: $-g_v(x + \Delta x) \cdot \Delta\tau \cdot S$

- **ve vrstvě zůstane:**

$$\frac{\Delta m_v}{\Delta\tau} = -S \cdot (g_v(x + \Delta x) - g_v(x)) = -S \cdot \Delta g_v$$



Bilance páry v elementární krychli

- Bilance hmotnosti vodní páry v elementární krychli

$$\frac{\Delta m_v}{\Delta \tau} = \frac{-S \cdot \Delta \tau \cdot \Delta g_v}{\Delta \tau} + w \cdot \Delta V$$

- w jsou zdroje vodní páry v jednotce objemu ($\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-3}$)
- použijeme-li vztah $\Delta V = S \cdot \Delta x$, pak

$$\frac{\Delta m_v}{\Delta \tau \cdot \Delta V} = -\frac{\Delta g_v}{\Delta x} + w$$

Difúzní rovnice

V limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$ a $\Delta \tau \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta m_v}{\Delta \tau \cdot \Delta V} = -\frac{\Delta g_v}{\Delta x} + w$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = -\frac{\partial g_v}{\partial x} + w$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\delta \frac{\partial \rho_v}{\partial x} \right) + w$$

hustotu vyjádříme ze stav. rce id. plynu $\rho_v = \frac{\mu_v}{R \cdot T} \cdot p_v$ a pak:

$$\frac{\mu_v}{R \cdot T} \frac{\partial p_v}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\delta \frac{\partial p_v}{\partial x} \right) + w$$

Difúzní rovnice – řešení v ustáleném stavu

- Levá strana rovnice se rovná nule, tedy máme

$$0 = -\frac{d}{dx} \left(-\delta \frac{dp_v}{dx} \right) + w$$

- Pokud je δ konstantní můžeme psát

$$0 = \delta \frac{d^2 p_v}{dx^2} + w$$

Vysýchání: $w > 0$ a průběh $p_v(x)$ je konkávní.

Kondenzace: $w < 0$ a průběh $p_v(x)$ je konvexní.

Jen difúze: $w = 0$ a průběh $p_v(x)$ je lineární.

- Křivka $p_s(\theta)$ je konvexní
- V ustáleném stavu je konvexní i křivka $p_s(x)$
- Po dosažení tlaku sytých par tedy dochází ke kondenzaci!

Určení rychlosti kondenzace v ustáleném stavu

- Tlak sytých par je funkcí teploty $p_s(\theta)$.
- Teplota v konstrukci je funkcí polohy $\theta(x)$.
- Sumasumárum tlak sytých par je funkcí polohy $p_s(x)$
- Ke kondenzaci dochází, když je tlak par roven tlaku sytých par, difúzní rovnici v kondenzační zóně tedy můžeme napsat:

$$0 = \delta \frac{d^2 p_s}{dx^2} + w$$

- Z ní vyjádříme rychlost kondenzace vodní páry M_c jako

$$M_c = -w = \delta \frac{d^2 p_s}{dx^2} \text{ (kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}\text{)}$$

Teplotní závislost tlaku sytých par p_s

- Rovnice, přibližně popisující experimentálně určenou závislost tlaku sytých par na teplotě, lze nalézt v literatuře.

Například Buckova rovnice:

$$p_s = 611,15 \cdot \exp \left(\left(23,036 - \frac{\theta}{333,7} \right) \cdot \left(\frac{\theta}{279,82 + \theta} \right) \right) \quad \text{pro } \theta < 0$$

$$p_s = 611,21 \cdot \exp \left(\left(18,678 - \frac{\theta}{234,5} \right) \cdot \left(\frac{\theta}{257,14 + \theta} \right) \right) \quad \text{pro } \theta > 0$$

Nebo tabulárně:

$\theta/^\circ\text{C}$	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	
p_s/Pa	2339	2198	2064	1937	1819	1705	1599	1498	1403	1313	
$\theta/^\circ\text{C}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
p_s/Pa	1228	1148	1073	1002	935	873	8113	758	706	657	611

Glaserova metoda

Na přednášce

Příklad – vnější obvodová kce

- Konstrukce o ploše $S = 8 \text{ m}^2$ se skládá ze dvou vrstev:
 - vnější: $d_1 = 0,1 \text{ m}$, $\mu_1 = 50$, $\lambda_1 = 0,04 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
 - vnitřní: $d_2 = 0,3 \text{ m}$, $\mu_2 = 8$, $\lambda_2 = 0,8 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Vnější prostředí:
 $\theta_e = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varphi_e = 90 \%$, $R_{se} = 0,04 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$, $S_{dse} = 1 \text{ cm}$.
- Vnitřní prostředí:
 $\theta_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varphi_i = 50 \%$, $R_{si} = 0,13 \text{ K m}^2 \text{ W}^{-1}$, $S_{dsi} = 2 \text{ cm}$.
- Součinitel difúzní vodivosti vodní páry $\delta = 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.
- Vypočtete:
 - ekvivalentní difúzní tloušťku S_d konstrukce,
 - hmotnostní tok vodní páry, který konstrukcí prochází
 - množství páry, které projde za 24 h

Příklad – řešení

- Ekvivalentní difúzní tloušťka vnější vrstvy včetně přestupu
 $S_{de} = d_1 \mu_1 + S_{dse} = 5,01 \text{ m.}$
- Ekvivalentní difúzní tloušťka vnitřní vrstvy včetně přestupu
 $S_{di} = d_2 \mu_2 + S_{dsi} = 2,42 \text{ m.}$
- Celková ekvivalentní difúzní tloušťka konstrukce $S_d = 7,43 \text{ m.}$
- Hustota toku vodní páry je tedy
$$g_v = \frac{\delta}{S_d} \Delta p = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{7,43} (2339 \cdot 0,5 - 611 \cdot 0,9) =$$
$$1,66 \cdot 10^{-8} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} = 0,06 \text{ g m}^{-2} \text{ h}^{-1}$$
- Za 24 h projde konstrukcí
$$\Delta m = g_v S \tau = 1,66 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 24 \cdot 3600 = 11,5 \text{ g.}$$

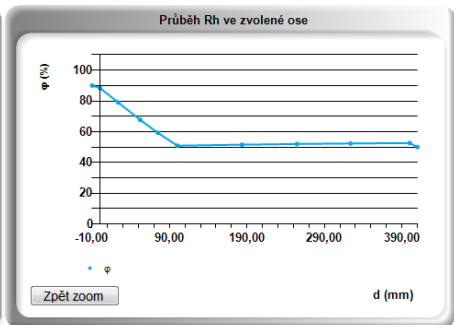
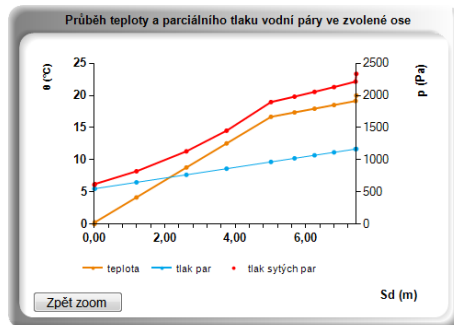
Příklad – řešení

Vypočtete:

- Parciální tlak vodní páry na rozhraní vrstev.
- Bude na rozhraní vrstev docházet ke kondenzaci vodní páry?
 - postupujme z vnější strany: $\frac{\Delta p_e}{S_{de}} = \frac{\Delta p}{S_d}$
 - tedy $\Delta p_e = \frac{\Delta p}{S_d} S_{de} = \frac{(2339 \cdot 0,5 - 611 \cdot 0,9)}{7,43} 5,01 = 417 \text{ Pa}$
 - parciální tlak vodní páry na rozhraní vrstev je tedy $p_{vx} = p_e + \Delta p_e = 548 + 417 = 965 \text{ Pa}$
 - teplota na rozhraní je $16,7 \text{ }^\circ\text{C}$
 - tomu odpovídá tlak sytých par $p_s \approx 1880 \text{ Pa}$ (viz tabulka dříve)
 - $p_{vx} \ll p_s \Rightarrow$ na rozhraní vrstev nedochází ke kondenzaci!

Příklad – řešení v programu KI-Real

- Grafický výstup z programu KI-Real
 - vnější strana s tepelnou izolací je vlevo
 - S_d zateplováku je 5 m, tloušťka je 100 mm



Příklad – znovu totéž pro opačné pořadí vrstev (vnitřní zateplení)

- Ekvivalentní difúzní tloušťka vnější vrstvy včetně přestupu

$$S_{de} = d_2 \mu_2 + S_{dse} = 2,41 \text{ m.}$$

- Ekvivalentní difúzní tloušťka vnitřní vrstvy včetně přestupu

$$S_{di} = d_1 \mu_1 + S_{dsi} = 5,02 \text{ m.}$$

- Jaký je parciální tlak vodní páry na rozhraní vrstev?

- postupujme z vnější strany: $\frac{\Delta p_e}{S_{de}} = \frac{\Delta p}{S_d}$

- tedy $\Delta p_e = \frac{\Delta p}{S_d} S_{de} = \frac{(2339 \cdot 0,5 - 611 \cdot 0,9)}{7,43} 2,41 = 201 \text{ Pa}$

- parciální tlak vodní páry na rozhraní vrstev je tedy

$$p_{vx} = p_e + \Delta p_e = 548 + 201 = 749 \text{ Pa}$$

- teplota na rozhraní je $2,73 \text{ }^\circ\text{C}$

- tomu odpovídá tlak sytých par $p_s \approx 744 \text{ Pa}$ (viz tabulka dříve)

- $p_{vx} > p_s \Rightarrow$ na rozhraní vrstev dochází ke kondenzaci!

Příklad – odhad rychlosti kondenzace

- Na rozhraní vrstev je parciální tlak vodní páry jen nepatrně větší než p_s
- Lze tedy předpokládat, že kondenzační oblast bude velmi úzká (jen rozhraní vrstev)
 - přesněji lze kondenzační oblast určit metodou tečen (Glaserova metoda popsaná v ČSN 730540) nebo rozdělením homogenních stavebních konstrukcí na více tenkých vrstev (viz ČSN EN ISO 13788).

Příklad – odhad rychlosti kondenzace

- Vypočteme tok vodní páry z interiéru k rozhraní:

$$g_{vi} = \delta \frac{\Delta p}{S_{di}} = 2 \cdot 10^{-10} \frac{2339 \cdot 0,5 - 744}{5,02} = 170 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

- Vypočteme tok vodní páry od rozhraní k exteriéru:

$$g_{ve} = \delta \frac{\Delta p}{S_{de}} = 2 \cdot 10^{-10} \frac{744 - 611 \cdot 0,9}{2,41} = 161 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

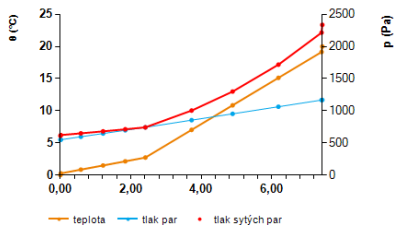
- Rozdíl obou je rychlost kondenzace:

$$M_c = g_{vi} - g_{ve} = 9 \cdot 10^{-10} \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

Příklad – řešení v programu KI-Real

- Grafický výstup z programu KI-Real
 - vnitřní strana s tepelnou izolací je vpravo
 - S_d zateplováku je 5 m, tloušťka je 100 mm

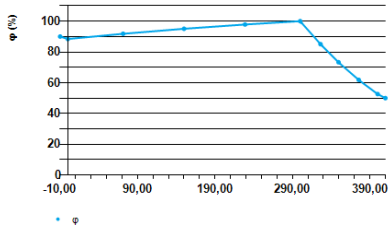
Průběh teploty a parciálního tlaku vodní páry ve zvolené ose



Zpět zoom

 S_d (m)

Průběh Rh ve zvolené ose



Zpět zoom

 d (mm)

Fickův zákon pro kapalinu

Množství kapalné vody ve vzorku materiálu se vyjadřuje pomocí hmotnostní vlhkosti u (% kg/kg)

$$u = \frac{m_w}{m_s} = \frac{\rho_w}{\rho_s} = \frac{n_w \mu_v}{V \rho_s} \quad (7)$$

- m_w je hmotnost vody ve vzorku
- m_s je hmotnost suchého vzorku, V je jeho objem

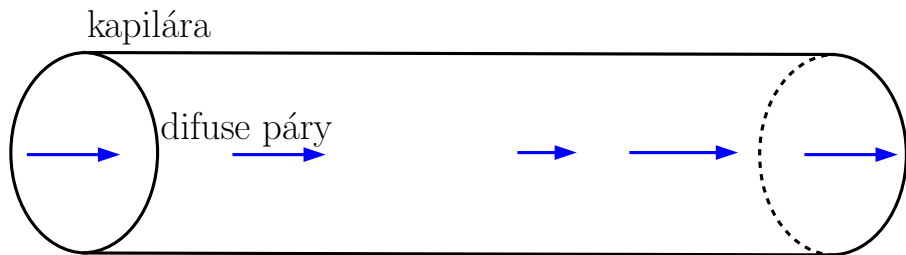
Ze vztahu (7) vyjádříme látkové množství vody ve vzorku

$$n_w = \frac{\rho_s}{\mu_v} u V$$

dosadíme do Fickova zákona a dostaneme:

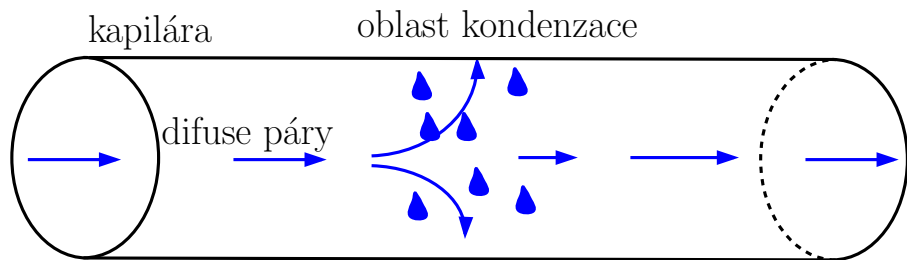
$$\vec{g}_w = -D \rho_s \text{grad } u \quad (\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

Šíření vlhkosti v kapiláře (pára + kapalina)



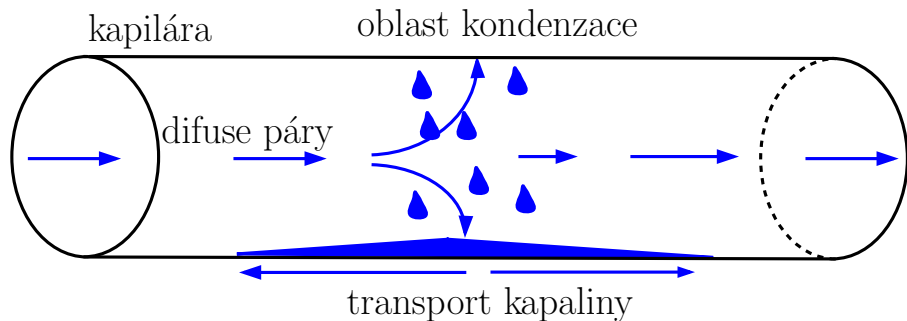
V suchém materiálu se vodní pára šíří difúzí...

Šíření vlhkosti v kapiláře (pára + kapalina)



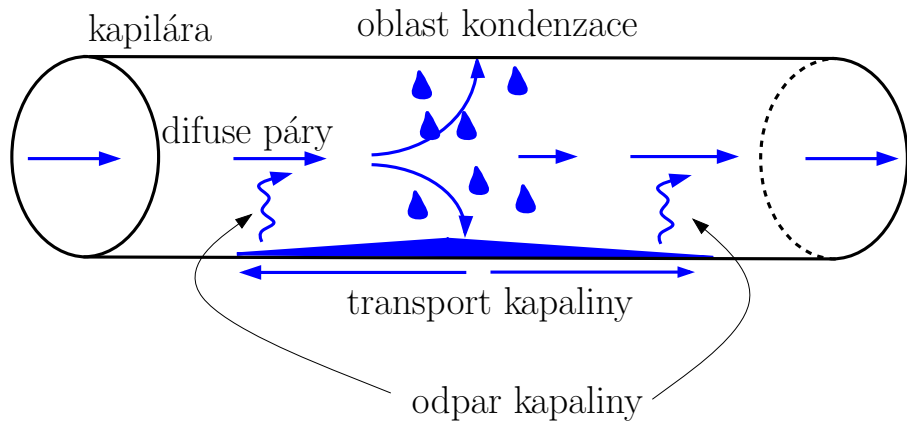
V místě, kde tlak je vyšší než sytý, dochází ke kondenzaci...

Šíření vlhkosti v kapiláře (pára + kapalina)



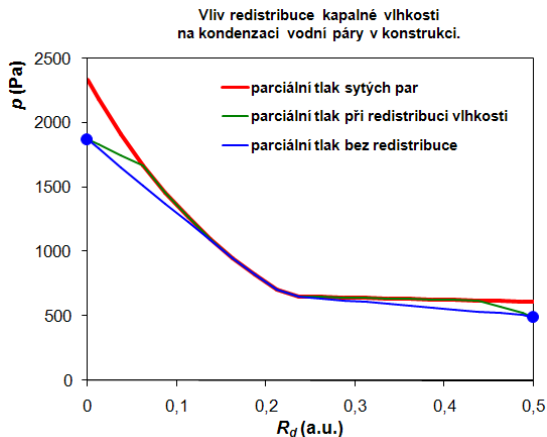
Z místa kondenzace se voda šíří v kapalné formě...

Šíření vlhkosti v kapiláře (pára + kapalina)



V místě, kde tlak je nižší než sytý, dochází k odparu.

Šíření vlhkosti v kapiláře (pára + kapalina)



Nastane dynamická rovnováha, jejím výsledkem je snížení množství páry vstupující do konstrukce a omezení kondenzace.

Zobecněné síly

Fouriérův a Fickův zákon jsou **přibližné**, empirické vztahy. Pomocí **zobecněných sil** lze transport hmoty a tepla vyjádřit **obecně**.

Zobecněné síly

- spád teploty ($\text{grad } T$)
- spád elektrochemického potenciálu ($\text{grad } \mu$)

Elektrochemický potenciál – kolik energie je potřeba na přidání 1 kg dané látky do daného místa

Tok tepla a hmoty obecně

Analogie – gravitační síla: $\vec{G} = -m \text{ grad} \varphi$, kde φ je potenciál gravitační síly $\varphi = gh$. Podobně:

Tok tepla \vec{q} , tok hmoty \vec{g}

$$\vec{q} = -L_{11} \text{ grad } T - L_{12} \text{ grad } \mu$$

$$\vec{g} = -L_{21} \text{ grad } \mu - L_{22} \text{ grad } T$$

Zřejmě platí $L_{11} = \lambda$!

Elektrochemický potenciál je funkcí stavových veličin (p, V, c, T, \dots)

$$\text{grad } \mu = \frac{\partial \mu}{\partial T} \text{ grad } T + \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ grad } p + \sum_j \frac{\partial \mu}{\partial c_j} \text{ grad } c_j$$

Tok tepla a hmoty obecně

Analogie – gravitační síla: $\vec{G} = -m \text{ grad} \varphi$, kde φ je potenciál gravitační síly $\varphi = gh$. Podobně:

Tok tepla \vec{q} , tok hmoty \vec{g}

$$\vec{q} = -L_{11} \text{ grad } T - L_{12} \text{ grad } \mu$$

$$\vec{g} = -L_{21} \text{ grad } \mu - L_{22} \text{ grad } T$$

Zřejmě platí $L_{11} = \lambda$!

Elektrochemický potenciál je funkcí stavových veličin (p, V, c, T, \dots)

$$\text{grad } \mu = \frac{\partial \mu}{\partial T} \text{ grad } T + \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ grad } p + \sum_j \frac{\partial \mu}{\partial c_j} \text{ grad } c_j$$

Termodifúze

Tok tepla a hmoty obecně

Analogie – gravitační síla: $\vec{G} = -m \text{ grad} \varphi$, kde φ je potenciál gravitační síly $\varphi = gh$. Podobně:

Tok tepla \vec{q} , tok hmoty \vec{g}

$$\vec{q} = -L_{11} \text{ grad } T - L_{12} \text{ grad } \mu$$

$$\vec{g} = -L_{21} \text{ grad } \mu - L_{22} \text{ grad } T$$

Zřejmě platí $L_{11} = \lambda$!

Elektrochemický potenciál je funkcí stavových veličin (p, V, c, T, \dots)

$$\text{grad } \mu = \frac{\partial \mu}{\partial T} \text{ grad } T + \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ grad } p + \sum_j \frac{\partial \mu}{\partial c_j} \text{ grad } c_j$$

Barodifúze

Tok tepla a hmoty obecně

Analogie – gravitační síla: $\vec{G} = -m \text{ grad} \varphi$, kde φ je potenciál gravitační síly $\varphi = gh$. Podobně:

Tok tepla \vec{q} , tok hmoty \vec{g}

$$\vec{q} = -L_{11} \text{ grad } T - L_{12} \text{ grad } \mu$$

$$\vec{g} = -L_{21} \text{ grad } \mu - L_{22} \text{ grad } T$$

Zřejmě platí $L_{11} = \lambda$!

Elektrochemický potenciál je funkcí stavových veličin (p, V, c, T, \dots)

$$\text{grad } \mu = \frac{\partial \mu}{\partial T} \text{ grad } T + \frac{\partial \mu}{\partial p} \text{ grad } p + \sum_j \frac{\partial \mu}{\partial c_j} \text{ grad } c_j$$

Difúze způsobená gradientem koncentrace

Sorpce

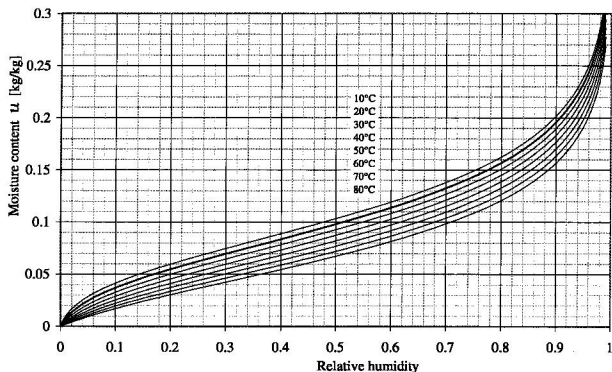
- V tenkých kapilárách (pórech) vodní pára kondenzuje při nižších hodnotách parciálního tlaku vodní páry p_r než je tlak nasycených par p_s na volném povrchu.
- Platí takzvaná Kelvinova rovnice, ve které σ je povrchové napětí vody, V_m je molární objem vodní páry a r je poloměr kapiláry.

$$\frac{p_r}{p_s} = e^{-\frac{2\sigma V_m}{RT r}}$$

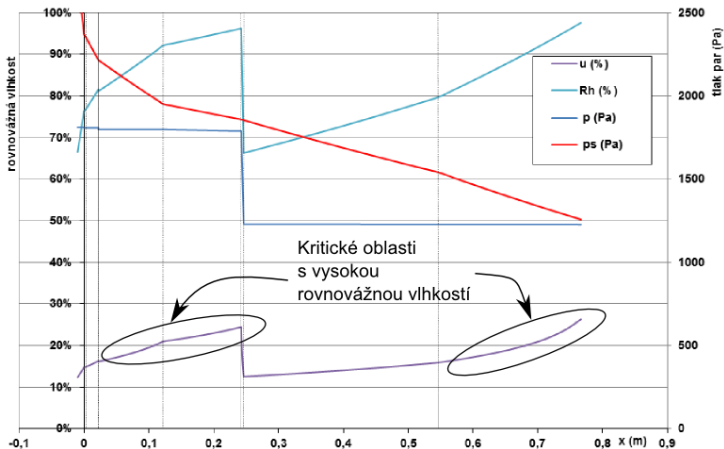
- Proto i při nízkých hodnotách relativní vlhkosti vzduchu porézní materiál obsahuje kapalnou vlhkost a nevysychá.
- Tento jev nazýváme **sorpce**.

Sorpce

- Rovnovážnou vlhkost materiálu při určité relativní vlhkosti a teplotě okolního vzduchu určují **sorpční izotermy**.
Pro smrkové dřevo vypadají takto:



Výpočet rovnovážné vlhkosti dřeva v konstrukci



software: [1DWoodSorption09.xls](#) [3]

Pravidla pro psaní technických textů

- Pravidla nejsou samoúčelná
 - zlepšují čitelnost textu
 - zabraňují špatnému pochopení

ČSN: Veličiny a jednotky

Psaní symbolů a značek je normováno: ČSN EN ISO 80000

Písmo

Veličiny, proměnné, neznámé (včetně funkcí), fyzikální konstanty, sčítací indexy

Píší se vždy *kurzívou* základního písma:

$x, l, d, T, f(x), \theta, \varphi, q, p, V, i, j, k, R, N_A, k_B, h...$

operátory, matematické funkce a konstanty, jednotky, text, číslice

Píší se vždy základním **stojatým** písmem.

Tedy $d, \text{grad}, \sin, \cos, \pi, e, 55$.

Příklad

$\frac{dd}{dx}$ není to též co $\frac{dd}{dx}$

První zlomek po vykrácení dává **podíl** veličin d a x ,
druhý zlomek představuje **derivaci** veličiny d podle x !

Písmo – indexy

Příklad

Jaký je rozdíl mezi c_v a c_v ??

Písmo – indexy

Příklad

Jaký je rozdíl mezi c_v a c_v ??

- Index v , psaný kurzívou naznačuje, že v je **veličina**.
Nejspíše objem. Půjde tedy o měrnou tepelnou kapacitu při konstantním objemu.
- Index v , psaný stojatě, bude zkratkou nějakého textu začínajícího na v . Např. vapour. Třeba tepelná kapacita páry...

Jednotky

- Jednotky, se píší vždy stojatě, oddělené **zúženou** mezerou od číselné hodnoty, tedy 3 m, 15 °C, 45 W, 273 K, 100 %.
 - Jedinou výjimkou je úhlový stupeň: 90°.
- Jednotka následující za číslem bez mezery znamená přídavné jméno:
 - 10° znamená desetistupňové (pivo),
 - 4% znamená čtyřprocentní (roztok),
 - 10m znamená desetimetrový...

Jednotky x veličiny

Příklad

Jaký je rozdíl mezi m a m ??

Jednotky x veličiny

Příklad

Jaký je rozdíl mezi m a m ??

- m je hmotnost (veličina)
- m je metr (jednotka)

Složené jednotky

Složené jednotky

- nejlépe: $0,4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$
- nebo $0,4 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
- případně $0,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ K}}$
- tam kde je nedostatek místa, například v záhlaví tabulek, lze akceptovat i formát $0,4 \text{ W}/\text{m}^2/\text{K}$

Jednotky se oddělují (zúženou) mezerou

- mK je milikelvin
- m K je metr **krát** Kelvin (možné je i m·K)

Jednotky v tabulkách a grafech

Jednotky se nikdy nepíší do hranatých závorek!

Špatně!

m [kg]	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]
70	0,04
100	0,05

Správně!

m/kg	$\frac{P}{W}$	$\theta/^\circ\text{C}$	m (kg)
70	0,04	20	178
100	0,05	40	60

Proč?

Hmotnost tělesa je 70 kg, tedy 70 **krát** kilogram:

$$m = 70 \cdot \text{kg}$$

rovnici podělíme kilogramem:

$$m/\text{kg} = 70 \text{ (a dostaneme holé číslo co je v tabulce!)}$$

Jednotky v tabulkách a grafech

Jednotky se nikdy nepíší do hranatých závorek!

Špatně!

m [kg]	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]
70	0,04
100	0,05

Správně!

m/kg	$\frac{P}{W}$	$\theta/^\circ\text{C}$	m (kg)
70	0,04	20	178
100	0,05	40	60

Proč?

Hmotnost tělesa je 70 kg, tedy 70 **krát** kilogram:

$$m = 70 \cdot \text{kg}$$

rovnici podělíme kilogramem:

$$m/\text{kg} = 70 \text{ (a dostaneme holé číslo co je v tabulce!)}$$

Jednotky v tabulkách a grafech

Jednotky se nikdy nepíší do hranatých závorek!

Špatně!

m [kg]	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]
70	0,04
100	0,05

Správně!

m/kg	$\frac{P}{W}$	$\theta/^\circ\text{C}$	m (kg)
70	0,04	20	178
100	0,05	40	60

Proč?

Hmotnost tělesa je 70 kg, tedy 70 **krát** kilogram:

$$m = 70 \cdot \text{kg}$$

rovnici podělíme kilogramem:

$$m/\text{kg} = 70 \text{ (a dostaneme holé číslo co je v tabulce!)}$$

Hranaté závorky

Čemu se rovná $[m]=?$

Hranaté závorky

Čemu se rovná $[m]=\text{kg}$

Hranaté závorky vyjadřují **rozměr** veličiny, která je do nich uzavřena

Rovnice tedy říká: rozměr hmotnosti je kilogram.

Drobnosti

Mínus na numerické klávesnici není mínus, ale spojovník!

Srovnej

- + plus
- - spojovník
- – mínus
- – pomlčka

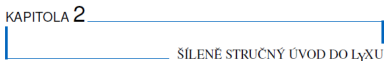
Použití spojovníku vadí hlavně v exponentech

Srovnej

- spojovník: e^{-3}
- mínus: e^{-3}

V čem psát technické texty?

- Oblíbeným softwarem pro psaní (nejen) technických textů s dobrou typografickou úrovní je \LaTeX .
- \LaTeX používá několik kvalitních textových procesorů, nejznámější je \LyX .
- Šablony pro psaní závěrečných prací a prezentací (jako je tato) v \LaTeX u a \LyX u, lze stáhnout z [8].



2.1 Instalace

Instalace \LyX u je dnes už poměrně jednoduchou záležitostí i na Windows. Z volitelných instalací doporučuji zaškrtnout JabRef. Během instalace \MikTeX u jsme dotázáni, zda si přejeme, aby chybějící balíčky byly doinstalovány on-the-fly. doporučuji zaškrtnout ano.

Obrázek: Ukázka šablony závěrečné práce pro \LyX .

Použité zkratky I

zkratka	veličina (anglicky)	definice	jednotky
Q	teplo (heat)		J
Φ	celkový tok tepla přes plochu S (heat flow rate)	$\Phi = \frac{dQ}{d\tau}$	W
\vec{q}	hustota tepelného toku (heat flux)	$q = \frac{d\Phi}{dS}$	$\frac{W}{m^2}$
θ	teplota (temperature)		°C
T	absolutní teplota (absolute temperature)	$T = \theta + 273,15$	K
τ	čas (time)		s

Použité zkratky II

φ	množství materiálu v objemu material in volume		$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
m_s	hmotnost suchého materiál mass of dry material		kg
m_w	hmotnost kapalně vody mass of liquid water		kg
M_c	rychlost kondenzace condensation rate		$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{ s}}$
μ	faktor difúzního odporu diffusion resistance factor		–

Použité zkratky III

μ_w	molární hmotnost vody molar mass of water	$0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{mol}}$
φ	relativní vlhkost vzduchu relative air humidity		– nebo %
u	vlhkost materiálu material moisture	$u = \frac{m_w}{m_s}$	– nebo %
v (index)	vodní pára (water vapour)		–
w (index)	kapalná voda (liquid water)		–

Literatura I

- [1] Prof. J.Biddle's lecture series on CPP (youtube)
- [2] Prof. Sukhatme: Lecture Series on Heat and Mass Transfer
- [3] Demonstrační software pro výuku
- [4] John H. Lienhard: A Heat Transfer Textbook
- [5] M. Rédr: Základy tepelné techniky
- [6] S. W. Churchill and H. H. S. Chu. "Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Vertical Plate." International Journal of Heat Mass Transfer 18 (1975), p. 1323.
15. E. R. G. Eckert and E. Soehngen.

Literatura II

- [7] S. W. Churchill and H. H. S. Chu. "Correlating Equations for Laminar and Turbulent Free Convection from a Horizontal Cylinder." *International Journal of Heat Mass Transfer* 18 (1975), p. 1049.
- [8] V. Vydra: Šablony pro psaní závěrečných prací a tvorbu prezentací v LaTeXu a LyXu