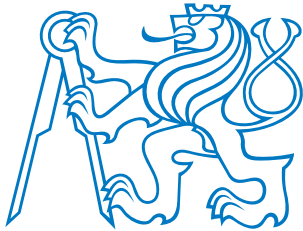


České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební

Rozvojové projekty Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR
Rozvojové projekty mladých týmů – RPMT 2014



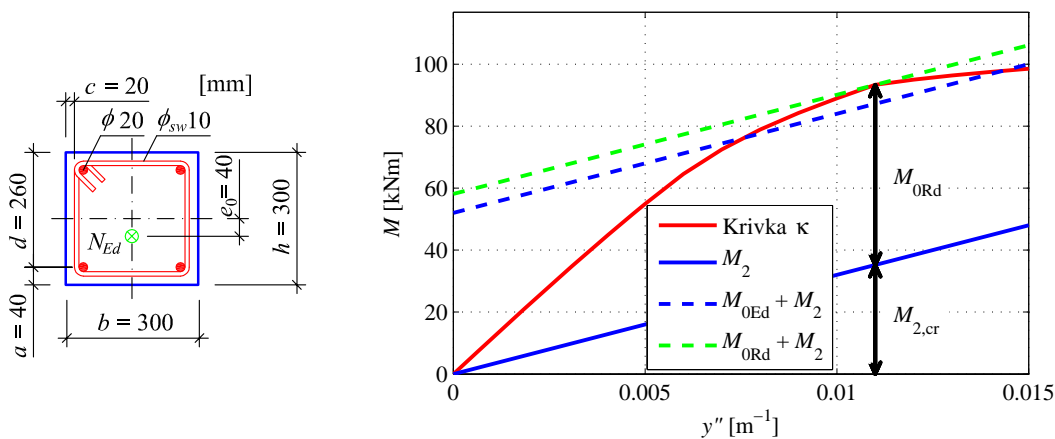
Projekt:

Využití pokročilého modelování konstrukcí v magisterském studiu

Hlavní řešitel: Ing. Michal Jandera, Ph.D.
Katedra ocelových a dřevěných konstrukcí

Výstup: Numerická analýza v programu *MATLAB* (aplikace *RCC*) a její ověření ručním výpočtem

Analýza štíhlého železobetonového sloupu



Vypracovali: Ing. Radek Štefan, Ing. Josef Sura
Katedra betonových a zděných konstrukcí
Praha, 2014

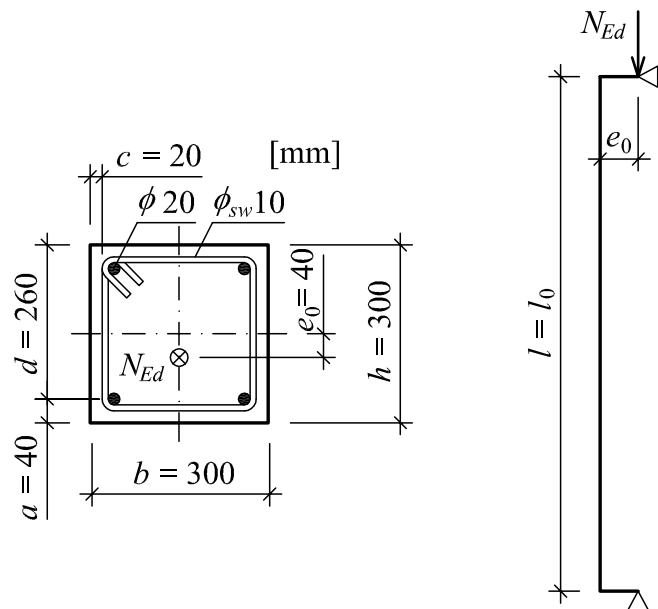
Obsah

| | |
|--|----|
| Obsah | 2 |
| 1 Úvod | 3 |
| 1.1 Zadání úlohy | 3 |
| 1.2 Postup řešení | 3 |
| 2 Numerická analýza v programu MATLAB (aplikace RCC) | 4 |
| 2.1 Instalace a spuštění programu | 4 |
| 2.2 Analýza problému | 4 |
| 3 Ověření výsledků numerické analýzy ručním výpočtem | 10 |
| 3.1 Stanovení momentu druhého řádu a celkového ohybového momentu | 10 |
| 3.2 Posouzení sloupu pomocí interakčního diagramu | 11 |
| 4 Závěr | 12 |
| Reference | 13 |
| Příloha 1 | 14 |
| Příloha 2 | 20 |

1 Úvod

1.1 Zadání úlohy

Předmětem úlohy je posouzení únosnosti štíhlého železobetonového sloupu ztužené konstrukce, viz Obr. 1. Sloup je kloubově podepřený, s účinnou délkou $l_0 = 4000$ mm a průřezem $b \times h = 300 \times 300$ mm². Je použit beton třídy C30/37 ($f_{ck} = 30$ MPa, $f_{cd} = 20$ MPa, $\eta = 1.0$, $\lambda = 0.8$, $\epsilon_{c2} = 0.002$, $\epsilon_{cu3} = 0.0035$) a ocelová výztuž třídy B500B ($f_{yk} = 500$ MPa, $f_{yd} = 435$ MPa, $\epsilon_{yd} = 0.002175$, $E_s = 200 \times 10^3$ MPa). Hlavní nosná výztuž je tvořena 4 pruty o průměru $\phi = 20$ mm ($A_s = 1256$ mm², $A_{s1} = A_{s2} = 628$ mm²), příčnou výztuž tvoří třmínky o průměru $\phi_{sw} = 10$ mm. Betonová krycí vrstva má tloušťku $c = 20$ mm. Sloup je zatížen tlakovou normálovou silou $N_{Ed} = 1300$ kN s excentricitou prvního řádu (včetně vlivu imperfekcí) $e_0 = e_f + e_i = 40$ mm ($M_{0Ed} = N_{Ed} e_0 = 1300 \cdot 0.04 = 52$ kNm). Poměr účinků zatížení (ohybových momentů) od kvazistálé kombinace zatížení a návrhové kombinace zatížení uvažujte $k \approx 0.6$. Hodnota konečného součinitele dotvarování je $\varphi_{(\infty, t_0)} \approx 2.0$.



Obr. 1: Schéma řešené úlohy

1.2 Postup řešení

Jednoduchým výpočtem lze ověřit, že se jedná o štíhlý sloup, u kterého je nutné při posouzení únosnosti zohlednit účinky druhého řádu (viz norma ČSN EN 1992-1-1 [1, čl. 5.8.3], příp. skripta [4, příklady 6.1, 6.2; příloha 13], [5, kapitola 7] a článek [8] – Příloha 1):

štíhlost sloupu:

$$\lambda = \frac{l_0 \sqrt{12}}{h} = \frac{4000 \sqrt{12}}{300} = 46.2,$$

limitní štíhlost sloupu:

$$\begin{aligned}\varphi_{ef} &= \varphi_{(\infty, t_0)} k = 2.0 \cdot 0.6 = 1.2, \\ \omega &= \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \frac{1256 \cdot 435}{300^2 \cdot 20} = 0.3, \\ r_m &= 1.0, \\ A &= \frac{1}{1 + 0.2 \varphi_{ef}} = \frac{1}{1 + 0.2 \cdot 1.2} = 0.81, \\ B &= \sqrt{1 + 2\omega} = \sqrt{1 + 2 \cdot 0.3} = 1.26, \\ C &= 1.7 - r_m = 1.7 - 1 = 0.7, \\ n &= \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{1300 \times 10^3}{0.3^2 \cdot 20 \times 10^6} = 0.72, \\ \lambda_{lim} &= \frac{20 A B C}{\sqrt{n}} = \frac{20 \cdot 0.81 \cdot 1.26 \cdot 0.7}{\sqrt{0.72}} = \underline{16.8} \leq 75,\end{aligned}$$

posouzení štíhlosti:

$$\lambda = 46.2 > \lambda_{lim} = 16.8,$$

⇒ účinky druhého řádu nelze zanedbat (sloup je štíhlý).

Ověření chování štíhlého sloupu s uvážením vlivů geometrické a materiálové nelinearity pomocí ručního výpočtu je prakticky nemožné, proto se v praxi používají buďto výpočetní programy, které umožňují analyzovat štíhlé prvky pomocí pokročilých numerických metod, nebo zjednodušené výpočetní postupy, spočívající obvykle ve zvětšení účinků zatížení stanovených lineární analýzou [5, kapitola 7].

V následujících částech budou uplatněny oba výše zmíněné přístupy. Zadaný prvek bude nejprve analyzován výpočetním programem RCC [7] (volně dostupná aplikace vytvořená v prostředí MATLAB [3]). Následně budou výsledky posouzení ověřeny ručním výpočtem pomocí zjednodušené metody založené na jmenovité křivosti [1, čl. 5.8.8].

2 Numerická analýza v programu MATLAB (aplikace RCC)

2.1 Instalace a spuštění programu

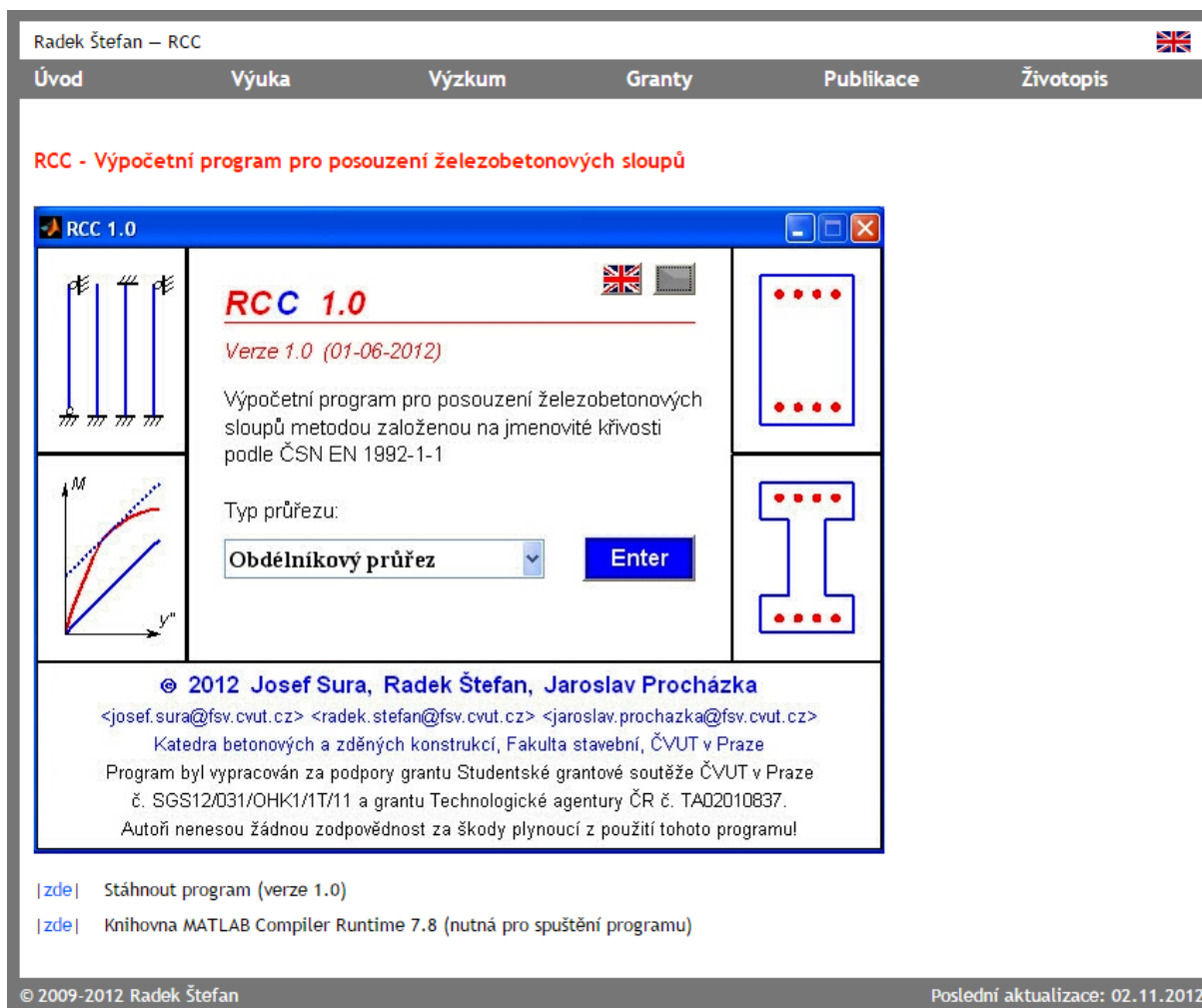
Numerická analýza problému bude provedena ve výpočetní aplikaci RCC [7], která byla vytvořena v prostředí matematického nástroje MATLAB [3]. Před spuštěním aplikace RCC je nejprve nutné nainstalovat příslušnou knihovnu programu MATLAB, kterou lze společně s vlastní aplikací RCC (soubor `RCC_1.0.exe`) stáhnout na adrese <http://people.fsv.cvut.cz/www/stefarad/software/rcc/rcc.cz.html>, viz Obr. 2.

Instalace knihovny se provede prostřednictvím instalačního souboru `MCRInstaller.exe`. Po jeho spuštění a výběru jazyka se objeví okno uvedené na Obr. 3. Dále se postupuje dle instrukcí instalace až do úspěšného nainstalování knihovny, viz Obr. 4.

Při spuštění vlastní aplikace `RCC_1.0.exe` se po krátkém zobrazení úvodního černého okna aktivuje hlavní okno programu RCC (viz Obr. 5), ve kterém lze nastavit jazyk programu (čeština, angličtina), tvar průřezu řešeného sloupu (obdélníkový průřez, průřez tvaru I) a stisknutím tlačítka `Enter` vstoupit do okna pro zadání vstupů do výpočtu.

2.2 Analýza problému

Program RCC [7] využívá výpočetní metodu založenou na jmenovité křivosti (resp. metodu náhradního štíhlého sloupu). Podrobný popis metody lze nalézt například v publikacích



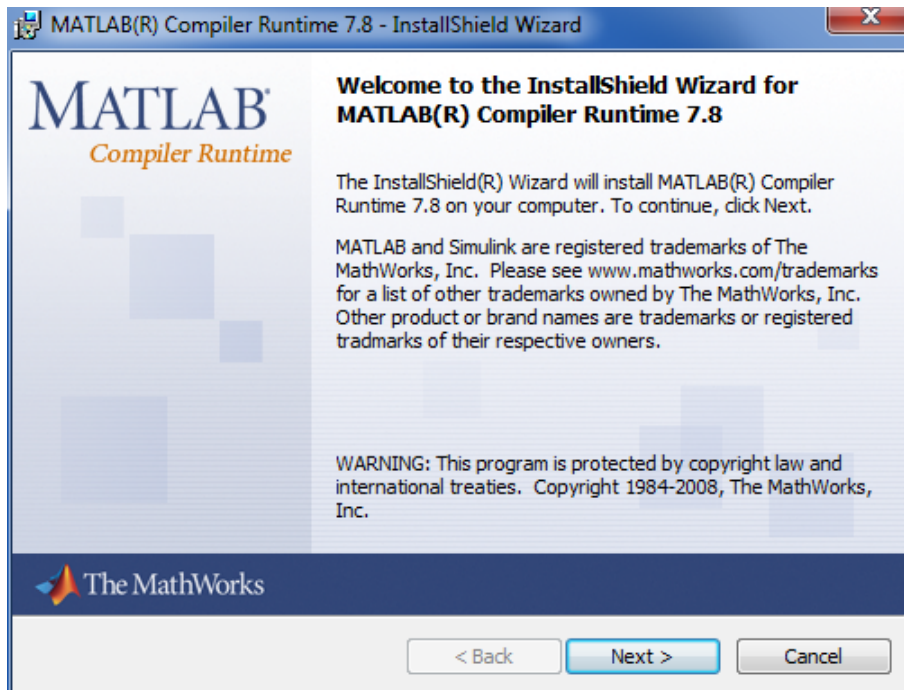
Obr. 2: Webová stránka programu RCC [7]

[2, 5, 6], [8] – Příloha 1. Aplikace uvedené metody vede na složitý iterační výpočet, který v podstatě nelze provést bez využití výpočetní techniky (viz [8] – Příloha 1). Proto byla metoda implementována do výpočetního programu RCC [7], pomocí kterého bude analyzován výše definovaný problém.

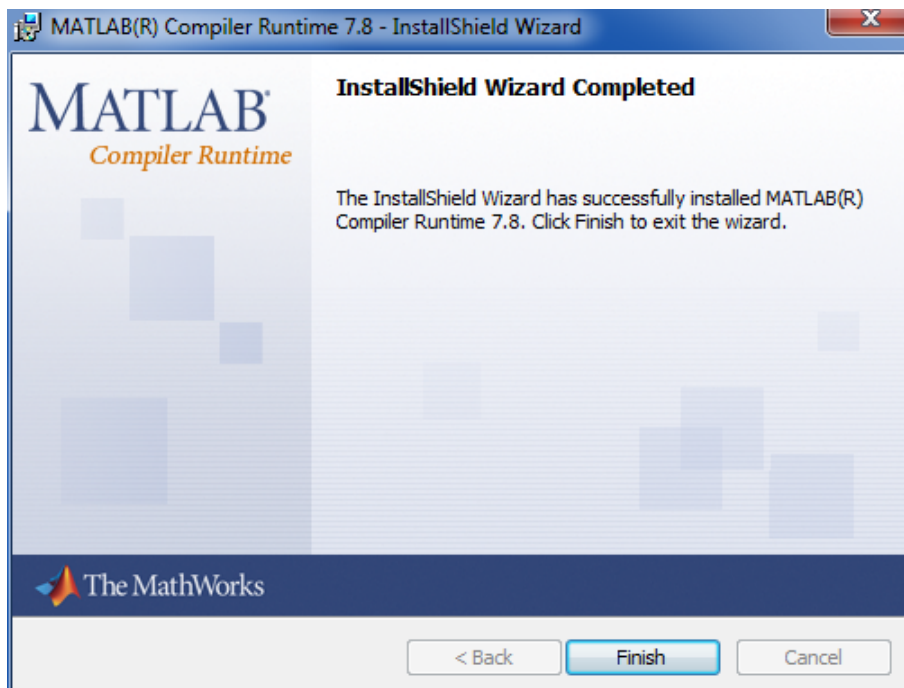
V okně pro zadání vstupů zadáme parametry řešeného sloupu, viz Obr. 6. V případě nejasností ohledně vstupních parametrů lze využít podrobnou nápovědu programu – tlačítka s otazníkem umístěná vedle zadávacích polí. Příklady oken nápovědy jsou uvedeny na Obr. 7. Kromě parametrů uvedených v zadání úlohy (viz kapitola 1.1) je třeba definovat také hodnotu součinitele c , vyjadřujícího rozdělení křivosti na řešeném prvku. V našem případě, kde je zadaný moment prvního řádu konstantní po délce prvku, volíme konzervativní limitní hodnotu $c = 8$, odpovídající konstantnímu celkovému ohybovému momentu (viz např. [5, kap. 7.4.4]). Geometrii zadaného průřezu a jeho odpovídající průřezové charakteristiky lze zobrazit stisknutím tlačítka VYKRESLIT PRŮŘEZ, viz Obr. 8.

Po stisknutí tlačítka VÝPOČET se zobrazí okno s výsledky výpočtu a posouzením zadaného prvku, viz Obr. 9. Zde je dále možné vykreslit výsledky výpočtu v grafu moment–křivost (tlačítka VYKRESLIT M–y'' a DIAGRAM, viz Obr. 10), případně uložit protokol shrnující vstupy do výpočtu a výsledky posouzení (tlačítka ULOŽIT PROTOKOL, viz Příloha 2).

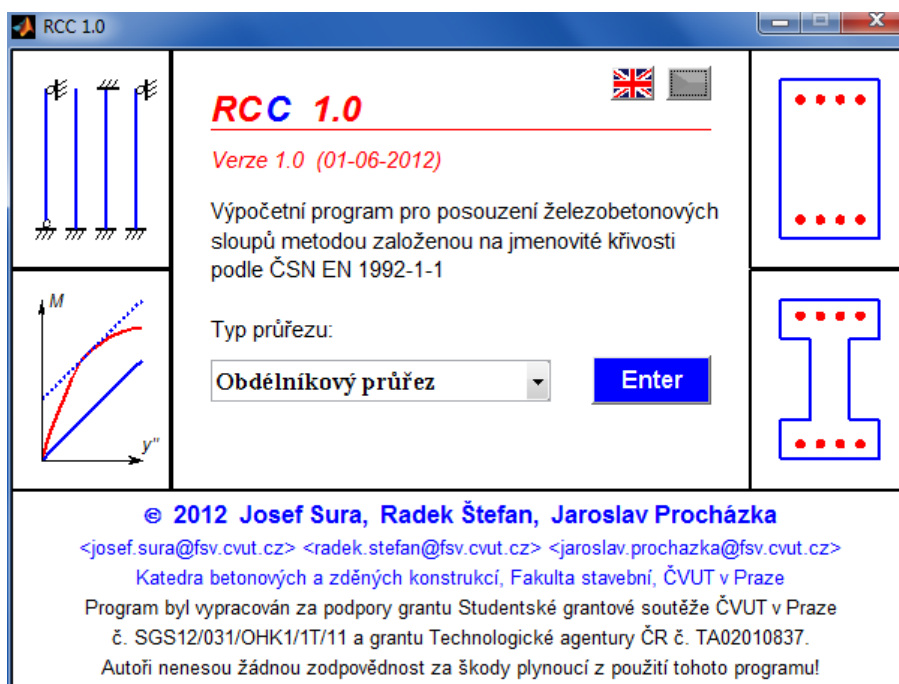
Z Obr. 9–10 (příp. viz Příloha 2) je zřejmé, že zadaný prvek vyhoví. V kapitole 3 ověříme výsledek jednoduchým ručním výpočtem.



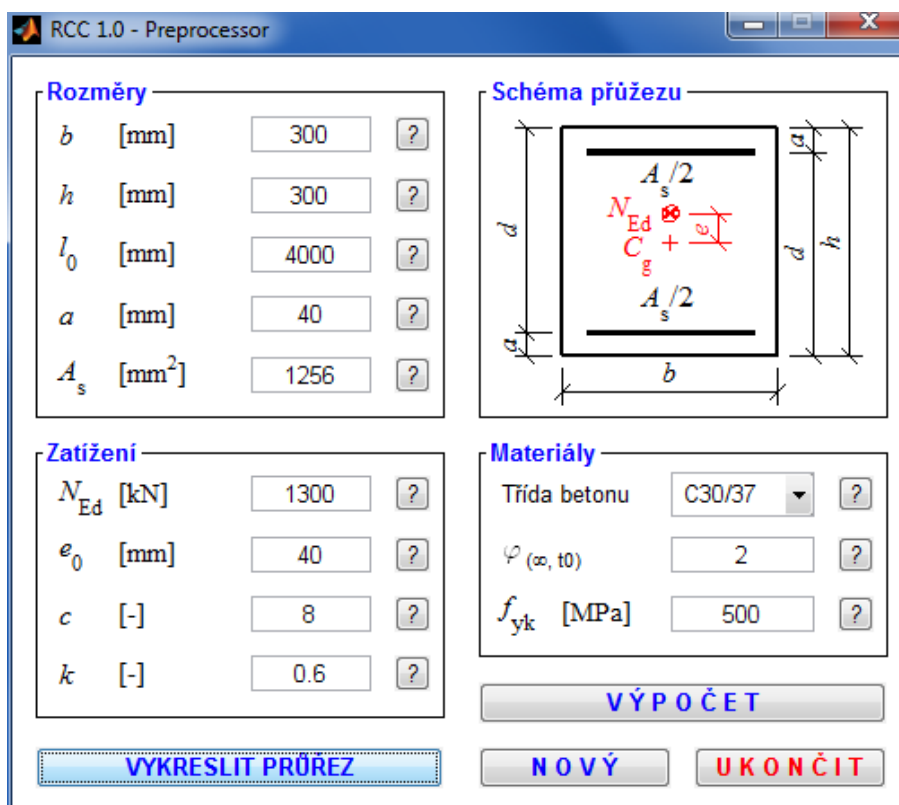
Obr. 3: Úvodní okno instalačního programu knihovny MATLAB



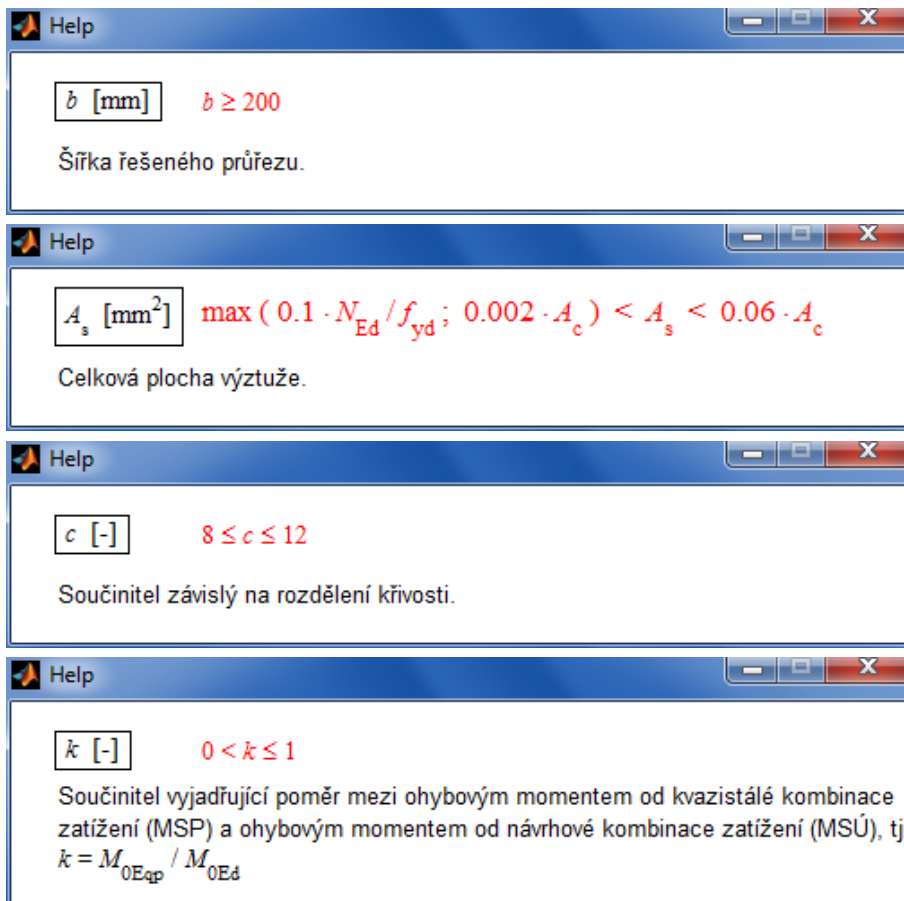
Obr. 4: Dokončení instalace knihovny MATLAB



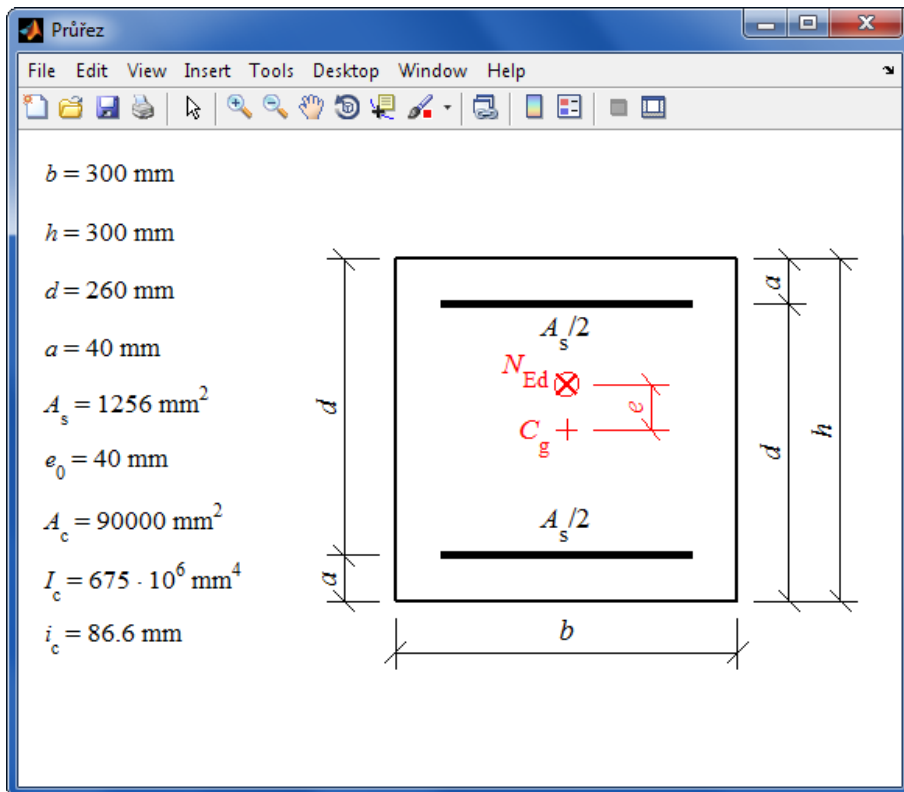
Obr. 5: Hlavní okno programu RCC



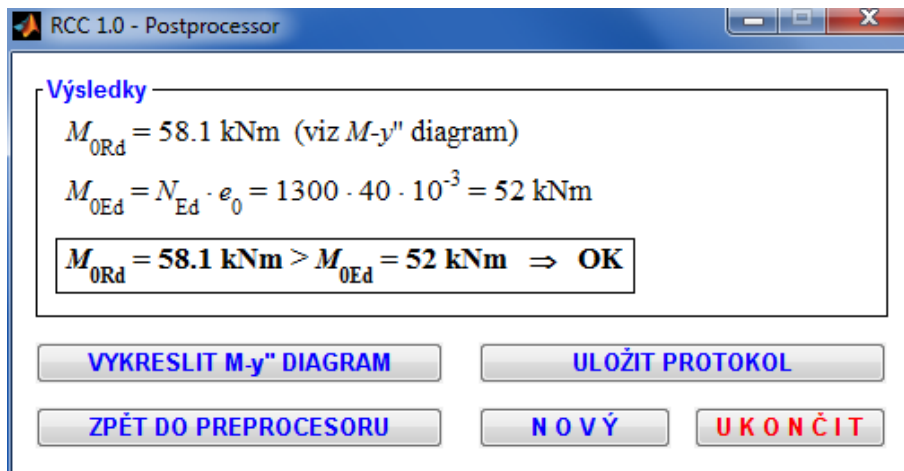
Obr. 6: Okno pro zadání vstupů v programu RCC



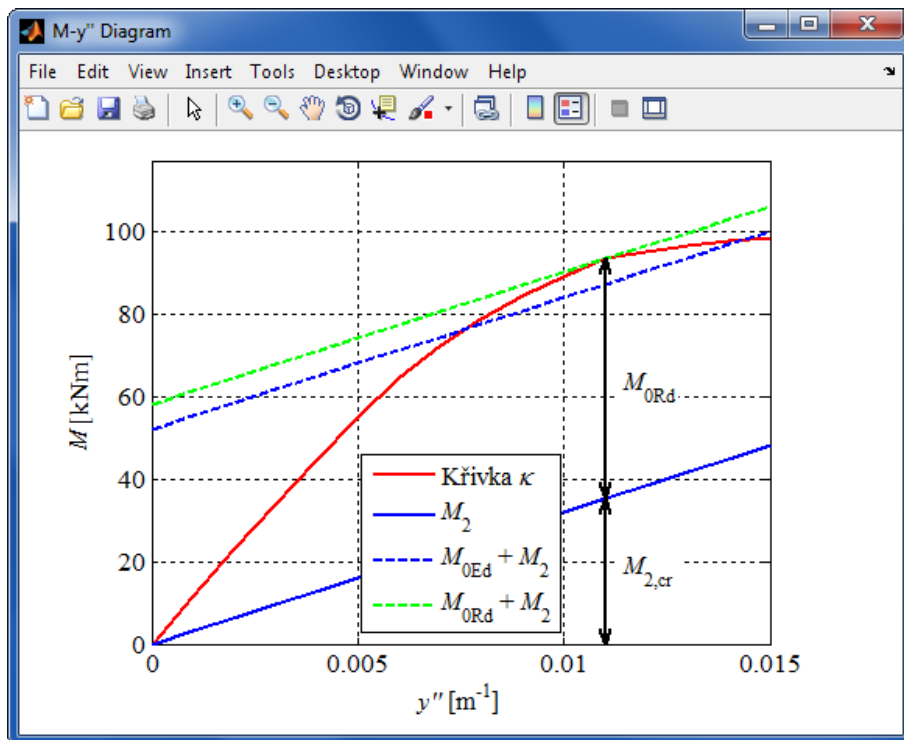
Obr. 7: Okna nápovědy v programu RCC



Obr. 8: Okno pro vykreslení zadaného průřezu v programu RCC



Obr. 9: Okno pro zobrazení výsledků v programu RCC



Obr. 10: Okno s grafickým znázorněním výsledků výpočtu v programu RCC

3 Ověření výsledků numerické analýzy ručním výpočtem

Ruční výpočet provedeme zjednodušenou metodou založenou na jmenovité křivosti (metoda, která vychází z postupu použitého v kapitole 2, avšak u které se nestanovuje celá křivka moment–křivost, ale moment druhého řádu se určí pouze pro jednu odhadnutou hodnotu křivosti, viz např. [5]). Popis použité zjednodušené metody lze nalézt např. ve zdrojích [1, 4, 5]. Metoda slouží ke stanovení momentu druhého řádu M_2 . Vlastní posouzení sloupu zatíženého kombinací normálové síly N_{Ed} a celkového ohybového momentu $M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = N_{Ed}(e_0 + e_2)$ se provede pomocí interakčního diagramu (viz [8] – Příloha 1).

3.1 Stanovení momentu druhého řádu a celkového ohybového momentu

Součinitel K_r (vliv velikosti normálové síly):

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} = \frac{1256 \cdot 435}{300^2 \cdot 20} = 0.3, \\ n_u &= 1 + \omega = 1 + 0.3 = 1.3, \\ n &= \frac{N_{Ed}}{A_c f_{cd}} = \frac{1300 \times 10^3}{0.3^2 \cdot 20 \times 10^6} = 0.72, \\ n_{bal} &\approx 0.4, \\ K_r &= \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} = \frac{1.3 - 0.72}{1.3 - 0.4} = \underline{0.64} \leq 1.0,\end{aligned}$$

součinitel K_φ (vliv dotvarování):

$$\begin{aligned}\varphi_{ef} &= \varphi_{(\infty, t_0)} k = 2.0 \cdot 0.6 = 1.2, \\ \beta &= 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0.35 + \frac{30}{200} - \frac{46.2}{150} = 0.192, \\ K_\varphi &= 1 + \beta \varphi_{ef} = 1 + 0.192 \cdot 1.2 = \underline{1.23} \geq 1.0,\end{aligned}$$

odhad křivosti:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_0} &= \frac{e_{yd}}{0.45d} = \frac{0.002175}{0.45 \cdot 0.26} = 0.0186 \text{ m}^{-1}, \\ \frac{1}{r} &= K_r K_\varphi \frac{1}{r_0} = 0.64 \cdot 1.23 \cdot 0.0186 = 0.0146 \text{ m}^{-1},\end{aligned}$$

výstřednost druhého řádu, moment druhého řádu:

$$\begin{aligned}e_2 &= \frac{1}{r} \frac{l_0^2}{c} = 0.0146 \frac{4^2}{8} = 0.029 \text{ m}, \\ M_2 &= N_{Ed} e_2 = 1300 \cdot 0.029 = 38 \text{ kNm},\end{aligned}$$

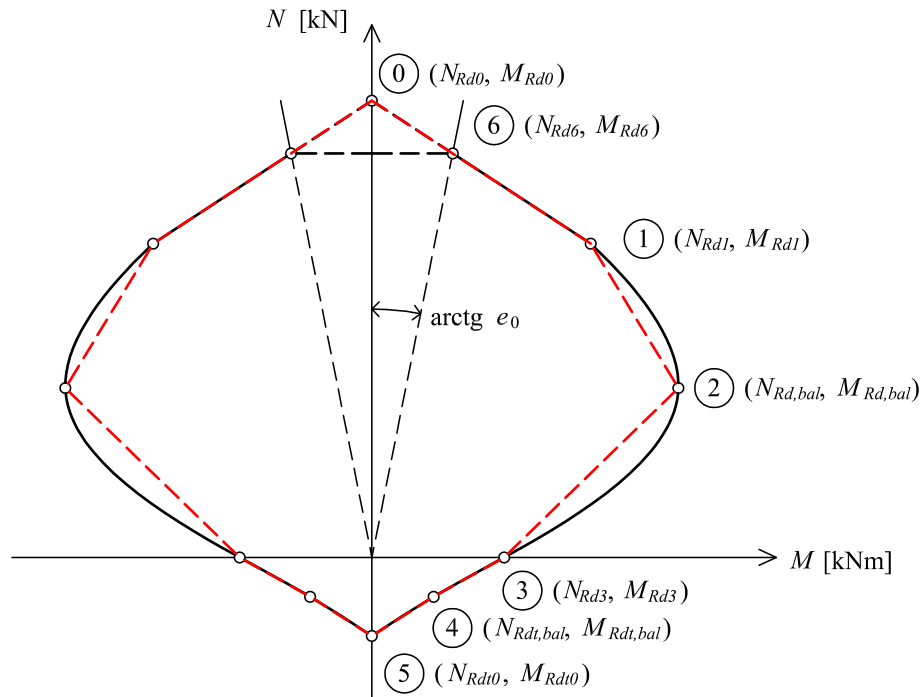
celkový ohybový moment působící na sloup:

$$M_{Ed} = M_{0Ed} + M_2 = 52 + 38 = 90 \text{ kNm}.$$

Zadaný sloup je zatížen kombinací normálové síly $N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$ a celkového ohybového momentu $M_{Ed} = 90 \text{ kNm}$. Posouzení provedeme pomocí interakčního diagramu.

3.2 Posouzení sloupu pomocí interakčního diagramu

Pro posouzení sloupu pomocí interakčního diagramu lze využít jednoduché výpočetní nástroje (obvykle vytvořené v programu MS Excel) dostupné na internetu nebo u pracovníků Katedry betonových a zděných konstrukcí. Zde použijeme ruční výpočet potřebných bodů interakčního diagramu a náhradu dané části diagramu lineární spojnici příslušných bodů, viz červená čárkovaná čára na Obr. 11.



Obr. 11: Příklad interakčního diagramu symetricky vyztuženého sloupu, viz např. [4, Obr. 11.1]

Nejprve stanovíme první tři body interakčního diagramu (body 0, 1 a 2) a určíme, ve které části diagramu se nachází posuzovaná kombinace $[N_{Ed} = 1300 \text{ kN}; M_{Ed} = 90 \text{ kNm}]$. Vzorce pro výpočet jednotlivých bodů viz např. [4, 5]:

doplňující parametry sloupu (ostatní parametry viz kapitola 1.1 a Obr. 1):

$$\xi_{bal,1} = \frac{\epsilon_{cu,3}}{\epsilon_{cu,3} + \epsilon_{yd}} = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.002175} = 0.617,$$

$$\xi_{bal,2} = \frac{\epsilon_{cu,3}}{\epsilon_{cu,3} - \epsilon_{yd}} = \frac{0.0035}{0.0035 - 0.002175} = 2.642,$$

$$z_1 = z_2 = 0.5h - a = 0.5 \cdot 0.3 - 0.04 = 0.11 \text{ m},$$

$$d_1 = d_2 = a = 0.04 \text{ m},$$

bod 0:

$$\sigma_s = \epsilon_{c2} E_s = 0.002 \cdot 200 \times 10^3 = \underline{400 \text{ MPa}} \leq f_{yd} = 435 \text{ MPa},$$

$$N_{Rd0} = A_c \eta f_{cd} + A_s \sigma_s$$

$$= 0.3^2 \cdot 1.0 \cdot 20 \times 10^3 + 1256 \times 10^{-6} \cdot 400 \times 10^3 = \underline{2302.4 \text{ kN}},$$

$$M_{Rd0} = \underline{0 \text{ kNm}},$$

bod 1:

$$\begin{aligned}d &= 0.26 \text{ m} > \xi_{bal,2} d_2 = 2.642 \cdot 0.04 = 0.11 \Rightarrow \sigma_{s2} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}, \\N_{Rd1} &= \lambda b d \eta f_{cd} + A_{s2} \sigma_{s2} \\&= 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.26 \cdot 1.0 \cdot 20 \times 10^3 + 628 \times 10^{-6} \cdot 435 \times 10^3 = \underline{1521.2 \text{ kN}}, \\M_{Rd1} &= \lambda b d \eta f_{cd} 0.5(h - \lambda d) + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 \\&= 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.26 \cdot 1.0 \cdot 20 \times 10^3 \cdot 0.5(0.3 - 0.8 \cdot 0.26) \\&\quad + 628 \times 10^{-6} \cdot 435 \times 10^3 \cdot 0.11 = \underline{87.5 \text{ kNm}},\end{aligned}$$

bod 2:

$$\begin{aligned}\xi_{bal,1} d &= 0.617 \cdot 0.26 = 0.16 > \xi_{bal,2} d_2 = 2.642 \cdot 0.04 = 0.11 \\&\Rightarrow \sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_{yd} = 435 \text{ MPa}, \\N_{Rd,bal} &= \lambda \xi_{bal,1} b d \eta f_{cd} + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} \sigma_{s1} \\&= 0.8 \cdot 0.617 \cdot 0.3 \cdot 0.26 \cdot 1.0 \cdot 20 \times 10^3 = \underline{770.0 \text{ kN}}, \\M_{Rd,bal} &= \lambda \xi_{bal,1} b d \eta f_{cd} 0.5(h - \lambda \xi_{bal,1} d) + A_{s2} \sigma_{s2} z_2 + A_{s1} \sigma_{s1} z_1 \\&= 0.8 \cdot 0.617 \cdot 0.3 \cdot 0.26 \cdot 1.0 \cdot 20 \times 10^3 \cdot 0.5(0.3 - 0.8 \cdot 0.617 \cdot 0.26) \\&\quad + 2 \cdot 628 \times 10^{-6} \cdot 435 \times 10^3 \cdot 0.11 = \underline{126.2 \text{ kNm}}.\end{aligned}$$

Jelikož platí:

$$N_{Rd1} = 1521.2 \text{ kN} > N_{Ed} = 1300 \text{ kN} > N_{Rd,bal} = 770.0 \text{ kN},$$

je zřejmé, že posuzovaná kombinace [$N_{Ed} = 1300 \text{ kN}$; $M_{Ed} = 90 \text{ kNm}$] se nachází v oblasti interakčního diagramu vymezené shora a zdola body 1 a 2. Pokud tuto část diagramu nahradíme úsečkou spojující body 1 a 2 (viz Obr. 11), můžeme stanovit moment únosnosti ze vztahu (viz např. [4, rovnice (11.18)])

$$\begin{aligned}M_{Rd} &= M_{Rd1} + \frac{M_{Rd,bal} - M_{Rd1}}{N_{Rd1} - N_{Rd,bal}}(N_{Rd1} - N_{Ed}) \\&= 87.5 + \frac{126.2 - 87.5}{1521.2 - 770.0}(1521.2 - 1300.0) = 98.9 \text{ kNm},\end{aligned}$$

a tedy

$$M_{Rd} = 98.9 \text{ kNm} > M_{Ed} = 90.0 \text{ kNm}$$

\Rightarrow posuzovaný sloup vyhoví!

Ručním výpočtem jsme došli ke stejnému závěru, jako při použití výpočetního programu RCC – sloup vyhoví. Je evidentní, že zjednodušená metoda je pouze přibližná – viz porovnání odhadnuté hodnoty křivosti ($1/r = 0.0146 \text{ m}^{-1}$) s hodnotou stanovenou podrobnou analýzou (Obr. 11).

4 Závěr

V kapitole 2 byl představen postup posouzení štíhlého železobetonového sloupu pomocí programu RCC [7], vytvořeného v prostředí matematického nástroje MATLAB [3]. Program

RCC využívá výpočetní metodu založenou na jmenovité křivosti (resp. metodu náhradního štíhlého sloupu), jejíž použití vede na složitý iterační výpočet.

Alternativně bylo provedeno posouzení ručním výpočtem s použitím zjednodušené výpočetní metody uvedené v normě ČSN EN 1992-1-1 [1].

Bylo ilustrováno, že zjednodušené výpočetní metody mohou být využity jednak pro vlastní posouzení řešeného prvku, jednak mohou být ale i nástrojem pro ověření výsledků dosažených sofistikovanými výpočetními nástroji.

Reference

- [1] ČSN EN 1992-1-1. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. ČNI, 2006.
- [2] Janda, L.; Křístek, V.; Kvasnička, M.; aj.: *Štíhlé betonové tlačené pruty*. Praha: SNTL, 1983.
- [3] MATLAB: Version 7.6.0 (R2008a). The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States, 2008.
- [4] Procházka, J.; Kohoutková, A.; Vašková, J.: *Příklady navrhování betonových konstrukcí 1*. Praha: ČVUT v Praze, první vydání, 2007, ISBN 978-80-01-03675-4.
- [5] Procházka, J.; Štěpánek, P.; Krátký, J.; aj.: *Navrhování betonových konstrukcí 1 – Prvky z prostého a železobetonového betonu*. ČBS Srvis, s.r.o., druhé vydání, 2006, ISBN 80-903807-1-9.
- [6] Sura, J.: *Navrhování betonových sloupů na účinky požáru*. Diplomová práce, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, 2010.
- [7] Sura, J.; Štefan, R.; Procházka, J.: *RCC – Výpočetní program pro posouzení železobetonových sloupů* [Software]. ČVUT v Praze. <http://people.fsv.cvut.cz/www/stefarad/software/rcc/rcc.cz.html>, 2012.
- [8] Sura, J.; Štefan, R.; Procházka, J.: Analýza štíhlých železobetonových sloupů metodou založenou na jmenovité křivosti. *Stavební obzor*, ročník 21, č. 10, 2012: s. 294–298.

Příloha 1

Přetisk článku:

Sura, J.; Štefan, R.; Procházka, J.: Analýza štíhlých železobetonových sloupů metodou založenou na jmenovité křivosti. *Stavební obzor*, ročník 21, č. 10, 2012: s. 294–298.

Analýza štíhlých železobetonových sloupů metodou založenou na jmenovité křivosti

Ing. Josef SURA
Ing. Radek ŠTEFAN
prof. Ing. Jaroslav PROCHÁZKA, CSc.
ČVUT v Praze – Fakulta stavební

Článek je zaměřen na problematiku posuzování štíhlých betonových sloupů metodou založenou na jmenovité křivosti. Je popsán výpočetní algoritmus pro stanovení závislosti moment-křivost, která je následně využita k vlastnímu posouzení únosnosti sloupů. Výpočetní postup je ověřen na příkladech porovnáním dosažených výsledků s údaji získanými experimentem a výpočtem metodou konečných prvků.

Analysis of slender concrete columns by a method based on nominal curvature

The paper is focused on the assessment of slender concrete columns by a method based on nominal curvature. An algorithm for the determination of a moment-curvature diagram used for the assessment of concrete columns is presented. The calculation method is verified on examples of concrete columns. The results obtained by the method are compared with experimental data and with the results obtained by finite element analysis.

Úvod

V současném betonovém stavitelství je již téměř nemožné obejít se bez štíhlých podpěrných konstrukcí, jako jsou sloupy, pilíře a stojky patrových rámců. Nároky na úsporu materiálu, estetičnost konstrukce a architektonické požadavky nutí stavební inženýry navrhovat stále subtilnější a odvážnější konstrukce. Charakteristickým znakem těchto konstrukcí je to, že účinky vnějšího zatížení jsou ovlivněny deformací konstrukce. Pro výstižný popis chování konstrukce, případně jejích prvků, je tedy nutné zohlednit účinky zatížení na deformovanou konstrukci [2].

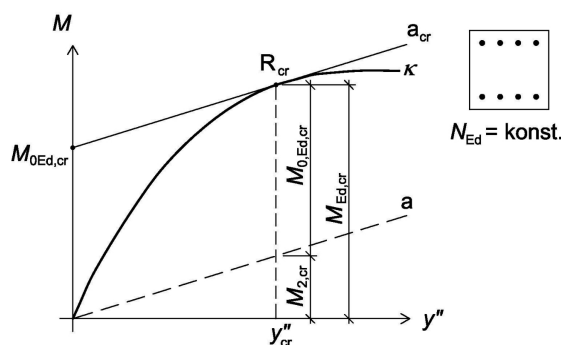
V článku je prezentován výpočetní postup pro posouzení železobetonových sloupů metodou založenou na jmenovité křivosti. Tato metoda je všeobecně známá (viz např. [2]), avšak vzhledem k tomu, že vyžaduje poměrně složitý iterativní výpočet, není doposud její využití v inženýrské praxi příliš rozšířeno.

Pro potřeby praktického návrhu je v ČSN EN 1992-1-1 [1] navržen zjednodušený postup, který nevyžaduje stanovení závislosti moment-křivost, čímž se celý výpočet značně zjednoduší, viz např. [6, kap. 7.4.4]. Tento postup však slouží pouze ke stanovení účinku zatížení s uvažováním vlivu druhého řádu, následně posouzení prvku je nutné provést samostatným výpočtem (např. pomocí interakčního diagramu). Proti tomu metoda popsaná v tomto článku slouží jak ke stanovení účinku zatížení (včetně vlivu druhého řádu), tak k posouzení prvku bez nutnosti doplňujících výpočtů. Další její předností je to, že umožňuje analyzovat excentricky zatížené sloupy libovolné štíhlosti.

Výpočetní algoritmus vycházející z popsané metody byl implementován v prostředí matematického nástroje MATLAB [4] do výpočetního programu RCC (Reinforced Concrete Columns) [8][9]. Postup je ověřen na konkrétních příkladech železobetonových sloupů [3]. Výsledky stanovené programem RCC jsou porovnány s údaji získanými experimentem a výpočtem metodou konečných prvků.

Princip posouzení štíhlého tláčeného prvku

Hlavním problémem při použití metody založené na jmenovité křivosti je určení závislosti ohybového momentu M na křivosti y'' (křivost bývá též označována jako $1/r$). Tato závislost se stanoví tak, že se pro konstantní hodnotu normálové síly a jednotlivé hodnoty křivosti y'' určí odpovídající hodnoty ohybového momentu M , který je daný průřez schopen přenést. Spojením takto získaných bodů vznikne křivka κ , jež bude ukončena, pokud bude v některém z materiálů dosaženo mezního přetvoření (dochází k meznímu stlačení betonu nebo k nadměrnému protažení výztuže).



Obr. 1. Diagram závislosti ohybového momentu na křivosti

Průběh momentu druhého řádu je přímkou a vyjádřen na obr. 1. Ohybový moment vzniká v důsledku deformace konstrukce od působícího zatížení. K tomuto vlivu dochází u všech tláčených prvků, avšak u masivních sloupů můžeme tento jev zanedbat. Kritéria pro zanedbání účinků druhého řádu vycházejí z předpokladů dostatečně masivního prvku, popř. z prokázání, že účinek momentu druhého řádu je zanedbatelný [1,6].

Průběh momentu druhého řádu lze popsat vztahem (1) viz [6]

$$M_2 = N_{Ed} \cdot e_2 = N_{Ed} \cdot K_\phi \cdot y'' \cdot \frac{I_0^2}{c}, \quad (1)$$

kde M_2 značí ohybový moment druhého řádu, N_{Ed} je hodnota normálové síly (pro sestrojení diagramu M - y se uvažuje konstantní hodnota), e_2 je výstřednost druhého řádu, K_ϕ je součinitel zohledňující účinek dotvarování, y značí křivost, l_0 je vzpěrná délka řešeného sloupu a c označuje součinitel, jehož hodnota je závislá na rozdělení křivosti po délce řešeného sloupu. Jak je uvedeno v [6, kap. 7.4.4], pro sinusový průběh momentu (resp. křivosti) po délce prutu se používá $c = 10 (\approx \pi^2)$; je-li moment prvního řádu konstantní, má se uvažovat nižší hodnota; hodnota $c = 8$ je dolním limitem, který odpovídá konstantnímu celkovému momentu (resp. křivosti) po délce prutu.

Součinitel K_ϕ se určí ze vztahu (2) viz [6]

$$K_\phi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} \geq 1, \text{ kde} \quad (2)$$

$$\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}, \quad (3)$$

kde λ je štíhlost prvku a φ_{ef} je účinný součinitel dotvarování, který se stanoví ze vztahu

$$\varphi_{ef} = \varphi_{(\infty,10)} \cdot k, \text{ kde} \quad (4)$$

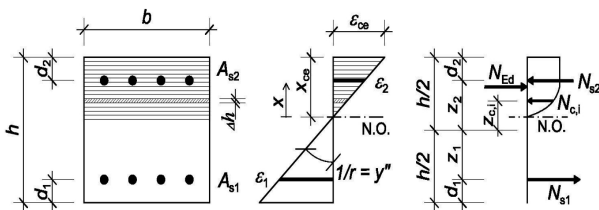
$$k = \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}, \quad (5)$$

kde $\varphi_{(\infty,10)}$ značí konečný součinitel dotvarování, M_{0Eqp} je ohybový moment prvního řádu vyvozený kvazi-permanentním zatížením (mezni stav použitelnosti) a M_{0Ed} je návrhový ohybový moment prvního řádu vyvozený uvažovanou kombinací zatížení (mezni stav únosnosti). Pokud se má vliv dotvarování zanedbat, uvažuje se $K_\phi = 1$ (tedy $\varphi_{(\infty,10)} = 0$).

Pro posouzení prvku je nutné stanovit hodnotu ohybového momentu $M_{0,Ed,cr}$, která odpovídá maximální možné hodnotě ohybového momentu prvního řádu, kterou je řešený prvek schopen přenášet při dané hodnotě normálové síly. Tato hodnota je na svislé ose vyznačena jako průsečík s přímkou a_{cr} , která je tečnou křivky κ a je rovnoběžná s přímkou a (obr. 1). Pokud je hodnota působícího ohybového momentu prvního řádu $M_{0,Ed}$ menší než kritická hodnota $M_{0,Ed,cr}$, vyhovuje daný prvek z hlediska únosnosti.

Stanovení závislosti moment – křivost

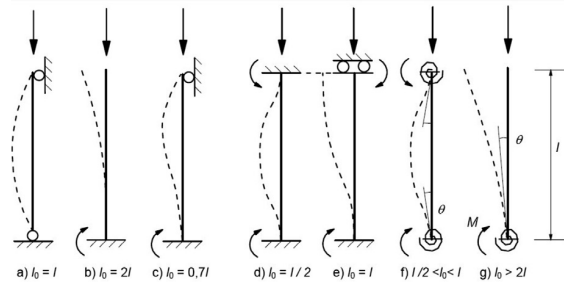
Pro stanovení závislosti M - y uvažujme tlačěný železobetonový sloup o výšce l , který je v hlavě zatížen normálovou silou N_{Ed} působící s výstředností e_0 v rovině ohybu. Průřez sloupu o rozměrech $b \times h$ je vyztužen ocelovými pruty o celkové průřezové ploše A_s (výztužné pruty jsou rozmístěny u stran kolmých na rovinu ohybu), viz obr. 2. Charakteristická hodnota pevnosti betonu je označena f_{ck} , charakteristická hodnota meze kluzu oceli f_{yk} .



Obr. 2. Schéma průřezu řešeného prvku

Schéma průřezu, jeho přetvoření při zatížení excentricky působící silou N_{Ed} a odpovídající obrazec napětí a sil v betonu a ve výztuži (síly jsou vykresleny ve směru jejich skutečného působení), znázorňuje obr. 2. Tahová pevnost betonu je zanedbána (což vede ke konzervativnímu návrhu), avšak jednoduchou úpravou popisovaného algoritmu by bylo možné i tento vliv započítat. Hodnota d_1 (d_2) označuje vzdálenost tažené (tlačené) výztuže od dolního (horního) líce průřezu, A_{s1} (A_{s2}) je plocha tažené (tlačené) výztuže, ε_{cc} značí přetvoření horních vláken průřezu (maximální tlakové přetvoření betonu), ε_1 (ε_2) přetvoření tažené (tlačené) výztuže, x_{cc} je vzdálenost horních vláken od neutrální osy (tj. výška tlačené oblasti průřezu), z_1 (z_2) vzdálenost tažené (tlačené) výztuže od těžiště betonového průřezu, $z_{c,i}$ vzdálenost těžiště i -té vrstvy betonu od těžiště betonového průřezu, N_{s1} (N_{s2}) označuje sílu v tažené (tlačené) výztuži, $N_{c,i}$ sílu v i -té vrstvě betonu.

Pro výpočet je dále nutné určit účinnou délku sloupu l_0 na základě podepření a skutečné délky sloupu l . Pro osamělé prvky s konstantním průřezem lze uvažovat vztahy uvedené na obr. 3. Pro prvky, které jsou součástí ztuzených nebo neztuzených konstrukcí, je nutné zohlednit skutečné tuhosti v podepření, viz např. [5, příloha 13].



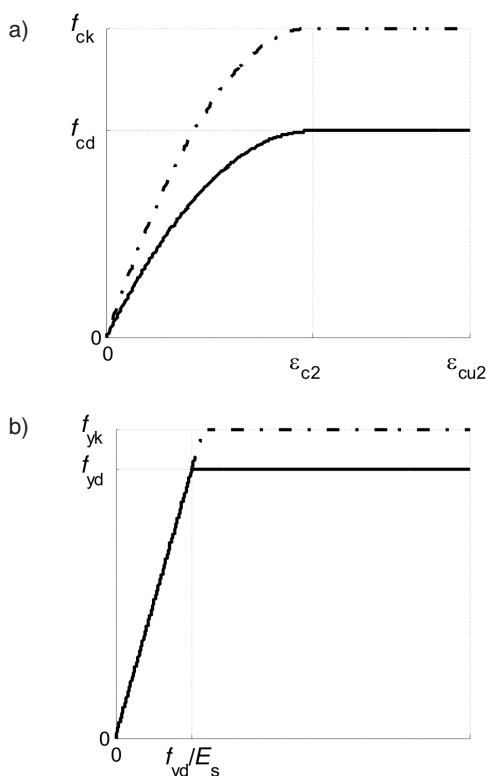
Obr. 3. Určení účinné délky sloupu na základě statického schématu [1]

Dále je pro výpočet nutné definovat pracovní diagramy základních materiálů. Pro názornost je na obr. 4a znázorněn parabolicko-rektangulární pracovní diagram betonu a na obr. 4b idealizovaný pracovní diagram betonářské výztuže shodný pro tlakovou i tahovou větev. V popisovaném výpočetním algoritmu je přetvoření v tlačěné oblasti průřezu uvažováno s kladným znaménkem, tudíž i tlakové napětí je uvažováno jako kladné. Tato konvence byla zavedena v důsledku zanedbání působení betonu v tahu (pro beton se tedy uvažují pouze kladné hodnoty napětí a přetvoření, pro výztuž mohou tyto veličiny nabývat kladných i záporných hodnot, v závislosti na poloze výztuže vzhledem k neutrální ose).

Stanovení závislosti M - y probíhá na základě výpočetního algoritmu, který byl odvozen v práci [7]. Nejprve je volena hodnota křivosti, která pro následující výpočty postupně vzrůstá od počáteční nulové hodnoty. Pro zvolenou křivost je iterativně dohledávána taková poloha neutrální osy, která splňuje podmínku rovnováhy mezi účinky vnitřních a vnějších sil podle rovnice

$$N_c + N_{s1} + N_{s2} = N_{Ed} \quad (6)$$

Jednotlivé síly v rovnici jsou určovány na základě napětí stanovených z pracovních diagramů v závislosti na přetvoření. Přetvoření je dopočítáváno z geometrických vztahů za předpokladu známé hodnoty křivosti a polohy neutrální osy. V každém místě průřezu lze tedy stanovit hodnotu přetvoření z rovnice



Obr. 4. Pracovní diagramy

a – parabolicko-rectangulární pracovní diagram betonu v tlaku,
b – pracovní diagram betonářské výztuže (shodný pro tah i tlak)

$$\varepsilon(x) = x \cdot \frac{\varepsilon_{ce}}{x_{ce}}, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{ce} = x_{ce} \cdot y'' \quad (8)$$

kde $\varepsilon(x)$ označuje přetvoření v libovolném místě průřezu a x označuje vzdálenost tohoto místa od polohy neutrální osy (nad neutrální osou se uvažuje kladné, pod osou záporné, viz obr. 2). Ostatní proměnné jsou popsány výše.

Síly ve výztuži jsou určovány z rovnice

$$N_{s,i} = A_{s,i} \cdot \sigma_{s,i}(\varepsilon_{s,i}), \quad (9)$$

kde $A_{s,i}$ je plocha výztuže a $\sigma_{s,i}(\varepsilon_{s,i})$ napětí stanovené z pracovního diagramu na základě přetvoření v místě těžiště výztuže. Pro beton je definována pouze tlačena větev pracovního diagramu, pro záporné přetvoření se uvažuje nulová hodnota napětí v betonu. Celková síla v tlaceném betonu se určí jako součet dílčích sil v jednotlivých vrstvách podle vztahů

$$N_{c,i} = \Delta h \cdot b \cdot \sigma_{c,i}(\varepsilon_{c,i}) \quad (10)$$

$$N_c = \sum_{i=1}^n N_{c,i}; \text{ kde } n = \frac{x_{ce}}{\Delta h}, \quad (11)$$

kde $N_{c,i}$ značí sílu v i -té vrstvě betonu o tloušťce Δh a šířce b odpovídající šířce průřezu (obr. 2). Napětí $\sigma_{c,i}(\varepsilon_{c,i})$ se určí z pracovního diagramu betonu (obr. 4a) na základě přetvoření stanoveného v těžišti i -té vrstvy betonu.

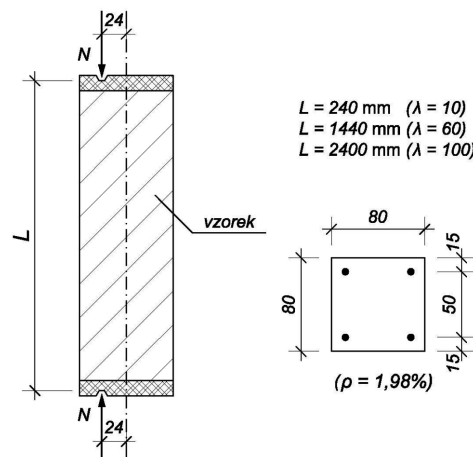
Poté, co je iterativně nalezena taková poloha neutrální osy, která vede ke splnění rovnice (6), přistoupí se ke stanovení ohybového momentu vnitřních sil k těžišti betonového průřezu dle rovnice

$$M = N_{s1} \cdot z_1 + N_{s2} \cdot z_2 + \sum_{i=1}^n N_{c,i} \cdot z_{c,i}. \quad (12)$$

Tento postup odpovídá stanovení ohybového momentu pro jednu hodnotu křivosti. Pro závislost $M-y''$ se postupně mění hodnota křivosti, příslušné hodnoty ohybového momentu se stanovují dle popsaného algoritmu. Tímto postupem je vytvořena křivka κ , která je ukončena, pokud je v některém z materiálů dosaženo mezního přetvoření. Alternativně by bylo možné ukončit křivku κ po dosažení bodu R_{cr} , viz obr. 1 (v následujícím bodě dojde k poklesu derivace křivky κ pod hodnotu směrnice přímky a , což lze ve výpočetním programu nastavit jako kritérium pro ukončení výpočtu křivky κ).

Ověření výpočetního algoritmu

Popsaný výpočetní algoritmus byl implementován v prostředí matematického nástroje MATLAB [4] do výpočetního programu RCC [8], [9]. Výsledky jsou porovnány s údaji získanými experimentem a výpočtem metodou konečných prvků. Práce [3] byla zaměřena na analýzu chování excentricky zatížených železobetonových sloupů různých štíhlostí. V práci byly prezentovány výsledky experimentů a odpovídajících výpočtů metodou konečných prvků. Uspořádání zatěžovací zkoušky znázorňuje obr. 5. Byly zkoušeny sloupy konstantního průřezu $80 \times 80 \text{ mm}^2$ délky 240 mm, 1 440 mm a 2 400 mm, což odpovídá štíhlosti $\lambda = 10, 60$ a 100. Zatěžovací síla působila ve všech případech s výstředností 24 mm. Pevnost betonu v době zkoušky byla 25,5 MPa, pevnost výztužných ocelových prutů 387 MPa. Všechny sloupy měly shodný stupeň vyztužení $\rho = 1,98 \%$.

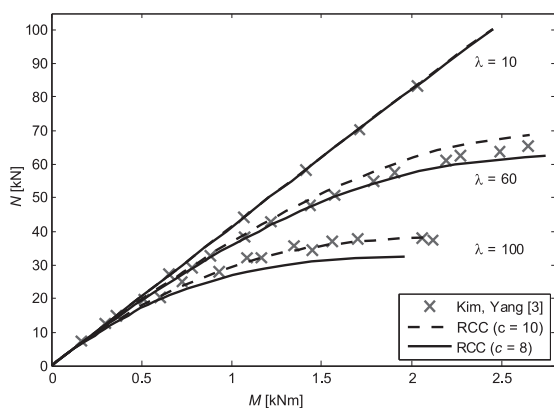


Obr. 5. Uspořádání zatěžovací zkoušky

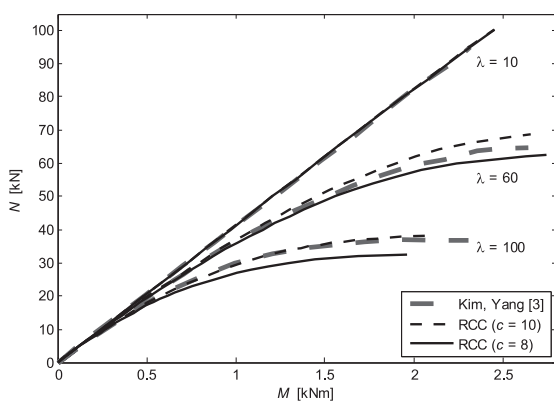
V průběhu zkoušky byla postupně zvětšována normálová síla působící na sloup a byly měřeny hodnoty průhybu uprostřed výšky sloupu. Z těchto hodnot bylo možné určit závislost normálové síly na působícím ohybovém momentu, který byl stanoven vynásobením normálové síly celkovou excentricitou (počáteční excentricita 24 mm + naměřená hodnota průhybu), čímž byl zohledněn vliv druhého řádu. Měření bylo prováděno pro sloupy třech různých štíhlostí ($\lambda = 10, 60$ a 100), přičemž pro každou štíhlost byly zkoušeny dva vzorky.

Kromě naměřených hodnot byly v práci [3] publikovány také odpovídající výsledky stanovené výpočtem metodou konečných prvků. Porovnání grafů závislosti N - M stanovených programem RCC s údaji naměřenými v rámci experimentu [3] je uvedeno na obr. 6. Pro každou štíhlost jsou na obr. 6 vykreslena data změřená na obou zkoušených vzorcích. Grafy závislosti N - M stanovené programem RCC jsou na obr. 7 porovnány s výsledky získanými výpočtem metodou konečných prvků [3]. Hodnoty limitních normálových sil, při jejichž překročení došlo ke kolapsu zkoušeného prvku, jsou uvedeny v tab. 1. Pro porovnání jsou vypsány odpovídající limitní normálové síly stanovené jednak výpočtem metodou konečných prvků (MKP) dle [3], jednak programem RCC.

Při výpočtu v programu RCC byly pro součinitel c (viz (1)) uvažovány dvě mezní hodnoty: $c = 10$ (sinusový průběh momentu) a $c = 8$ (konstantní průběh momentu). Vliv dotvarování nebyl vzhledem ke krátkodobému charakteru zkoušky uvažován ($K_p = 1$).



Obr. 6. Porovnání výsledků stanovených programem RCC [8] s výsledky experimentu [3]



Obr. 7. Porovnání výsledků stanovených programem RCC [8] s výsledky stanovenými metodou konečných prvků [3]

Jak je zřejmé z obr. 6, výsledky stanovené programem RCC jsou ve velmi dobré shodě s výsledky experimentu. Pro masivní sloup ($\lambda = 10$) je účinek druhého řádu zanedbatelný. Chování prvku simulované programem RCC je v naprostém souladu s naměřenými údaji, a to bez ohledu na zvolenou hodnotu součinitele c (tento součinitel má vliv pouze na výpočet momentu druhého řádu).

Pro sloup štíhlosti $\lambda = 60$ je také dosaženo velmi dobré shody s experimentem. Všechny naměřené hodnoty leží v oblasti vymezené křivkami stanovenými pro zvolené hod-

Tab. 1. Porovnání naměřených a vypočtených hodnot

| Vzorek | Štíhlost λ | N_{exp} | N_{mkp} | $N_{rcc,10}$ | $N_{rcc,8}$ | N_{exp}/N_{mkp} | $N_{exp}/N_{rcc,10}$ | $N_{exp}/N_{rcc,8}$ |
|---------|-----------------------|-----------|-----------|--------------|-------------|-------------------|----------------------|---------------------|
| | | [kN] | | | | | | |
| 10L2-1 | 10 | 52,7* | | 100,4 | 100,2 | 0,555 | 0,525 | 0,526 |
| 10L2-2 | | 83,1* | 95 | | | 0,875 | 0,828 | 0,829 |
| 60L2-1 | 60 | 63,7 | 65,1 | 68,6 | 62,3 | 0,978 | 0,929 | 1,022 |
| 60L2-2 | | 65,7 | | | | 1,009 | 0,958 | 1,055 |
| 100L2-1 | 100 | 38,2 | 37 | 38,3 | 32,5 | 1,032 | 0,997 | 1,175 |
| 100L2-2 | | 35 | | | | 0,946 | 0,914 | 1,077 |

* Ke kolapsu došlo z důvodu nedokonalého upevnění čelních desek měřeného vzorku.

N_{exp} je limitní hodnota normálové síly stanovená experimentem [3].

N_{mkp} je limitní hodnota normálové síly stanovená MKP výpočtem [3].

$N_{rcc,10}$ je limitní hodnota normálové síly stanovená programem RCC [8] pro $c = 10$.

$N_{rcc,8}$ je limitní hodnota normálové síly stanovená programem RCC [8] pro $c = 8$.

noty součinitele c . Z obrázku je patrné, že se vzrůstající hodnotou normálové síly se postupně zvětšuje účinek druhého řádu a průběh celkového momentu po délce prvku se mění z počáteční konstantní hodnoty (odpovídá $c = 8$) na průběh blízký sinusovému tvaru (odpovídá $c = 10$).

Pro velmi štíhlý sloup ($\lambda = 100$) je dosaženo shody s naměřenými hodnotami, pokud je při výpočtu v programu RCC uvažována hodnota součinitele $c = 10$. Je zřejmé, že pro takto štíhlý sloup je vliv druhého řádu velmi významný. Při zatěžování se kromě počátečního konstantního momentu prvního řádu začne velmi rychle projevovat moment druhého řádu, což podstatně ovlivňuje průběh celkového momentu již při malých hodnotách normálové síly.

Výsledky výpočtu získané metodou konečných prvků [3] téměř přesně vystihují skutečné chování prvků při experimentech, viz obr. 6 a obr. 7. Vzhledem k tomu, že byla použita velmi sofistikovaná metoda (z hlediska formulace i z hlediska výpočetní náročnosti mnohem komplikovanější než metoda publikovaná v tomto článku), není tato shoda překvapivá. Z obrázku 7 je patrné, že porovnání výsledků získaných programem RCC s výsledky stanovenými výpočtem metodou konečných prvků [3] vychází obdobně jako při porovnání s výsledky experimentu (obr. 6). Jedním z hlavních závěrů tohoto článku je to, že použitím výše popsaného algoritmu lze dosáhnout stejně přesných výsledků jako při použití pokročilé metody konečných prvků.

Hodnoty uvedené v tab. 1 potvrzují, že kromě případů, kdy při experimentu došlo k předčasnému kolapsu v důsledku nedokonalého upevnění čelních desek měřeného vzorku, je experimentálně stanovená hodnota limitní normálové síly vždy mezi příslušnými hodnotami určenými programem RCC. Lze tedy konstatovat, že navržený výpočetní algoritmus je schopen s dostatečnou přesností vystihnout skutečné chování železobetonových, excentricky zatížených tlačných prvků, a to jak masivních, tak i velmi štíhlých.

Závěr

V článku byla popsána výpočetní metoda pro posuzování štíhlých tlačných betonových prvků, pomocí které lze zohlednit účinky druhého řádu, jejichž vliv je významný zejména pro štíhlé prvky. Výpočetní algoritmus vycházející z uvedené metody autoři zapracovali do volně dostupného výpočetního programu RCC. Navržený výpočetní postup byl ověřen na konkrétních příkladech a jeho přesnost byla

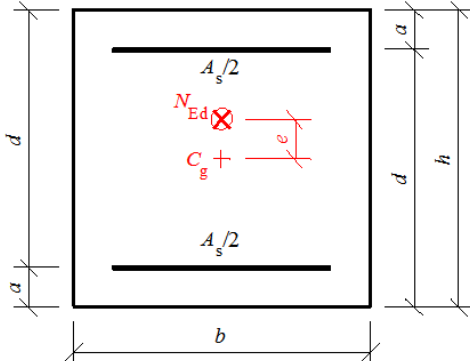
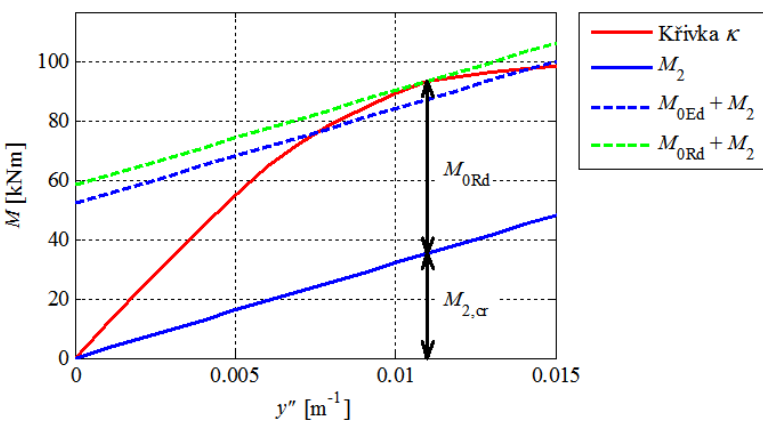
vyhodnocena jako plně dostačující. Další výzkum bude zaměřen na rozšíření prezentovaného výpočetního algoritmu a příslušného výpočetního programu tak, aby bylo možné analyzovat chování štíhlých betonových prvků také při požáru.

Článek vznikl za podpory projektů SGS12/031/OHK1/1T/11 Studentské grantové soutěže ČVUT a TA02010837 Technologické agentury ČR .

Literatura

- [1] ČSN EN 1992-1-1 Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. ČNI, 2004.
- [2] Janda, L. – Křístek, V. – Kvasnička, M. – Procházka, J.: Štíhlé betonové tlačené pruty. Praha, SNTL 1983, 232 s.
- [3] Kim, J. K. – Yang, J. K.: Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns. *Engineering Structures* 1995, Vol. 17, pp. 39-51.
- [4] MATLAB. Ver. 7.6.0.324 (R2008a). USA, The MathWorks 2008.
- [5] Procházka, J. – Kohoutková, A. – Vašková, J.: Příklady navrhování betonových konstrukcí 1. Praha, ČVUT, 2007, 145 s. ISBN 978-80-01-03675-4
- [6] Procházka, J. – Štěpánek, P. – Krátký, J. – Kohoutková, A. – Vašková, J.: Navrhování betonových konstrukcí 1. Prvky z prostého a železového betonu. 3. vyd. Praha, ČBS Servis, 2008, 316 s. ISBN 978-80-903807-5-2
- [7] Sura, J.: Navrhování betonových sloupů na účinky požáru. [Diplomová práce], ČVUT v Praze, 2010.
- [8] Sura, J. – Štefan, R. – Procházka, J.: RCC [software online]. CTU in Prague, 2012. <http://concrete.fsv.cvut.cz/~stefan/software/rcc/rcc.cz.htm>
- [9] Sura, J. – Štefan, R. – Procházka, J.: Software pro posouzení štíhlých železobetonových sloupů. Beton TKS, (zasláno k publikování).

Příloha 2

| | |
|---|--|
| <p>Protokol</p> | <p>RCC 1.0 Verze 1.0 (01-06-2012)</p> |
| <p>Vstupy</p> <p>Rozměry $b = 300 \text{ mm}$ $h = 300 \text{ mm}$ $A_c = 90000 \text{ mm}^2, I_c = 675 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ $i_c = 86.6 \text{ mm}, l_0 = 4000 \text{ mm}, \lambda = 46.2$ $A_s = 1256 \text{ mm}^2, a = 40 \text{ mm}$</p> <p>Zatížení $N_{Ed} = 1300 \text{ kN}, e_0 = 40 \text{ mm}, c = 8$</p> <p>Materiály Beton: C30/37, Výztuž: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$</p> <p>Výsledky</p>   <p> $M_2 = N_{Ed} \cdot y'' \cdot l_0^2 / c = 1300 \cdot y'' \cdot 4^2 / 8 = 2600 \cdot y'' \text{ kNm}$ $M_{0Rd} = 58.1 \text{ kNm}$ $M_{0Ed} = N_{Ed} \cdot e_0 = 1300 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 52 \text{ kNm}$ </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $M_{0Rd} = 58.1 \text{ kNm} > M_{0Ed} = 52 \text{ kNm} \Rightarrow \text{OK}$ </div> <p>Zadaný sloup vyhoví.</p> | |
| <p>© 2012 Josef Sura, Radek Štefan, Jaroslav Procházka <josef.sura@fsv.cvut.cz> <radek.stefan@fsv.cvut.cz> <jaroslav.prochazka@fsv.cvut.cz> Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, ČVUT v Praze Program byl vypracován za podpory grantu Studentské grantové soutěže ČVUT v Praze č. SGS12/031/OHK1/1T/11 a grantu Technologické agentury České republiky č. TA02010837. Autoři nenesou žádnou zodpovědnost za škody plynoucí z použití tohoto programu!</p> | |