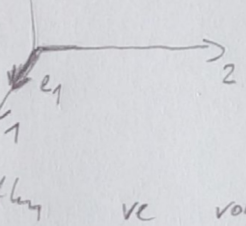
KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

- hm. bod reprezentuje těleso dostatečně malé v porovnání s dráhou kterou urazí
- rovnoměrný pohyb: $v(t) = \text{const.} \Rightarrow a(t) = 0$
- nerovnoměrný: $v(t) \neq \text{const.} \Rightarrow a(t) \neq 0$
- poloha bodu ~~definována pomocí~~ určena jednoznačně v souřadné (vztažné) soustavě pomocí polohového vektoru

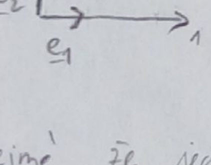
$$\underline{r} = x_1 \underline{e_1} + x_2 \underline{e_2} + x_3 \underline{e_3} \quad [m]$$

, $\underline{e_i}$ jsou báze, např. $\underline{e_1} = (1, 0, 0)$

$$|\underline{r}| = \sqrt{r \cdot r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad [m]$$



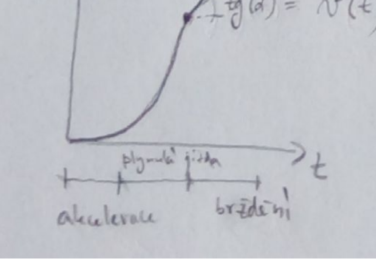
- ve 2D, objekt ve vzdálenosti od počátku ve vodorovném směru 3 m a ve svislém 5 m



$$\underline{r} = 3 \cdot (1; 0) + 5\,(0; 1) = (3; 5)$$
$$|\underline{r}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} = 5{,}8\,m$$

- je zřejmé, že jednotlivé souřadnice jsou na sobě nezávislé
  - se změnou v x_1 není automaticky spojená změna x_2 a stejně je to i s rychlostí a akcelerací, což se bude hodit při řešení příkladů

- pokud máme závislost ujeté dráhy bodu (tzn. změny polohy) v závislosti na čase, tak směrnice tečny $s(t)$ reprezentují aktuální rychlost



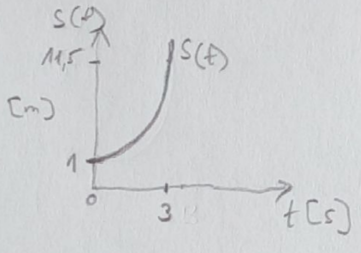
⇓

- při rozjíždění je rychlost malá, stejně tak při dobrzďování

- pokud máme závislost veličiny, třeba dráhy, na proměnné, třeba času, danou funkčním předpisem, pak můžeme směrnici tečny v libovolném čase spočítat jako derivaci

- ze začátku si řekneme jak se počítá derivace polynomů: vždy se sníží řád polynomu a původní řád se stane koeficientem členu, takže např.

$$S(t) = 0{,}5t^2 + 2t + 1 \qquad t \in \langle 0;3 \rangle \ [s]$$

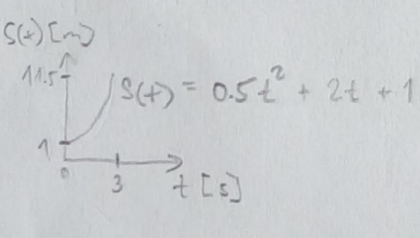


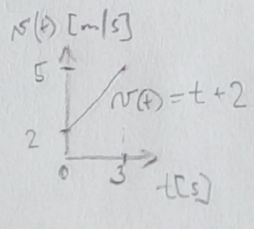
→ pak směrnice tečny (= rychlost) k $s(t)$ je derivací

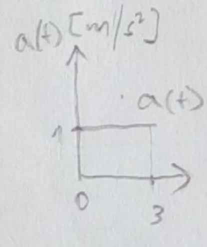
$$\frac{ds}{dt} = v(t) = 0{,}5 \cdot 2\,t^1 + 2 = t + 2$$

- a protože změnou rychlosti je zrychlení (akcelerace), tak

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t) = 1 \cdot t^0 = 1$$







- proces lze i otočit, pomocí tzv "antiderivace" = integrálu, u polynomu se zvyšuje řád a snižuje koeficient před proměnnou: uvažujme $s(t=0) = 0$, $v(t=0) = 3$ m/s a $a = 3t + 1$ m/s² – kolik bude $s(t = 5s)$?

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (3t+1)\,dt = \frac{3}{2}t^2 + t + v(t=0) = \frac{3}{2}t^2 + t + 3$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \left(\frac{3}{2}t^2 + t + 3\right) dt = \frac{3}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3t + s(t=0) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 3t$$

→ $s(t=5) = 90$ m

Př. Lokomotiva se rozjíždí s konstantním zrychlením $a = 0{,}45\ m/s^2$. Za jaký čas a po jaké dráze dosáhne rychlosti 36 km/h. Jaká bude její průměrná rychlost na tomto úseku?

$a = 0.45\ m/s^2$

$v(t=0) = 0 \qquad v = \int a\, dt = \int 0.45\, dt = 0.45t + 0$

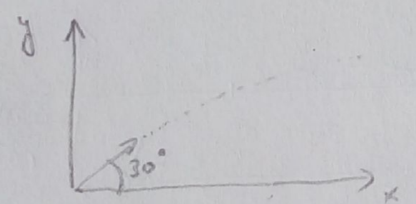
$36/3.6 = 0.45t \Rightarrow t = \frac{10}{0.45} = \underline{22{,}2\ s}$

$[m/s]$

$s = \int v\, dt = \int 0.45t\, dt = \frac{0.45}{2} t^2 + 0$

$s(t = 22{,}2\ s) = \underline{111\ m} \qquad \bar{v} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{111}{22{,}2} = \underline{5\ m/s}$

Př. Za jakou dobu dosáhne projektil vystřelený 100 m/s pod elevačním úhlem 30° výšky 100 m? Odpor vzduchu zanedbejte.



$\downarrow$: $g = 10\ m/s^2$

$v_g = \int 10\, dt = 10t + 0 = 10t\ [m/s]$

$\uparrow$: $v_p = 100 \cdot \sin 30°\ [m/s]$

$v_y = \overbrace{100 \cdot \sin 30°}^{50} - 10t\ [m/s]$

$s_y = \int v_y\, dt = \int (50 - 10t)\, dt = 50t - \frac{10}{2} t^2 + 0$

- kdy dosáhne $s_y = 100$? : $100 = 50t - 5t^2$

$t^2 - 10t + 20 = 0$

$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2} \quad \begin{cases} 7{,}24\ s \\ 2{,}76\ s \end{cases}$

$\boxed{\text{DÚ 1}}$ Z rozhledny o výšce 30 m byl vržen kámen ve vodorovném směru rychlostí 10 m/s, určete velikost rychlosti při dopadu ($v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$) a vodorovnou vzdálenost místa dopadu od paty rozhledny. Odpor prostředí zanedbejte. Uvažujte $g = 10\ m/s^2$.