

SOUŘADNICOVÉ ŘEŠENÍ OBLOUKŮ

POMOCNÝ TEXT PRO VÝUKU PŘEDMĚTU 154YIGD

Doc. Ing. Pavel Hánek, CSc.

ČVUT v Praze – FSv, K154

Tento text je převzat ze skript HÁNEK, P. - HÁNEK, P. (jr.) - MARŠÍKOVÁ, M.: *Geodézie pro obor pozemkové úpravy a převody nemovitostí*. České Budějovice, Jihočeská univerzita 2007, 88 s. 2. vydání 2008. ISBN 978-80-7040-971-8.

2016

Poznámka k symbolice skript

Obecné zásady stanoví, že velkým latinským písmenem jsou značeny body, malým latinským písmenem úsečky a přímký a malým řeckým písmenem úhly, příp. směry. Tradice a praxe různých oborů však vedou k výjimkám nebo k tomu, že ustálený symbol má v různých souvislostech odlišný význam.

Z hlediska obsahu skript jsou nejběžnějšími symboly následující:

- d .. rozdíl, diference (též δ , o),
 - h .. převýšení, výška,
 - H .. výška, výšková souřadnice,
 - l .. pozorování, měření,
 - n .. počet měření, pozorování, prvků, veličin,
 - n' .. nadbytečný počet pozorování,
 - o .. odchylka, rozdíl (též δ),
 - r .. poloměr oblouku kružnice i Země (ve starší symbolice R),
 - R .. označení pravého úhlu (též $\pi/2$, 100 gon, 90°), poloměr kruž. oblouku, Země (též r),
 - s .. empirická (výběrová) směrodatná odchylka,
 - S .. střed,
 - v .. oprava,
 - y, x .. rovinné souřadnice,
 - Y, X .. souřadnicové osy,
 - z .. zenitový úhel (nověji ζ), výšková souřadnice,
 - Z .. výšková souřadnicová osa (též H),
 - α .. hladina významnosti, směrník v místní soustavě, středový úhel, vodorovný úhel,
 - δ .. odchylka, rozdíl (též o , d),
 - Δ .. označení rovinného trojúhelníku,
 - ε .. pravá (skutečná) chyba,
 - ζ .. zenitový úhel (též z),
 - π .. číslo π , přímý úhel (též 180° , 200 gon, 200^g , $2R$),
 - ρ .. radián ($\rho = 63662,0 \text{ mgon} = 206265''$),
 - σ .. směrník, směrodatná odchylka (ve starší symbolice m - střední chyba),
 - φ .. vodorovný směr,
 - ω .. vodorovný úhel (též α , β apod.).
- \sqrt{s} je identické se zápisem $\sqrt{(s)}$ i s korektním \sqrt{s} ,
 $\text{cotg } \alpha$ je identické se zápisem $\text{cot } \alpha$.

V dalším textu nesouhlasí číslování kapitol a odstavců s číslováním vzorců a obrázků. Vzájemné odkazy v textu jsou však zachovány.

1 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ OBLOUKŮ LINIOVÝCH STAVEB

Při výstavbě dopravních liniových staveb a při úpravě vodotečí se geodet zúčastňuje všech fází výstavby od přípravy podkladů pro projekt po realizaci investice, spolupracuje i při jejich provozu, údržbě a obnově.

K dopravním stavbám patří převážně liniové stavby (dálnice, silnice, polní cesty, železnice, lanovky, mosty, tunely, vodní cesty), které jsou charakterizovány svou trasou.

Trasa je prostorová čára, určující směrový a výškový průběh liniové stavby. Jejími složkami, které vytyčujeme, jsou osa a niveleta.

Osa (půdorys trasy) je tvořena přímými částmi, kružnicovými oblouky a přechodnicemi, popř. přechodnicovými oblouky.

Niveleta představuje sklonové poměry trasy.

Při nasazení těžké mechanizace na stavbě nelze zaručit, že vytyčené body budou fyzicky zachovány. Jediným spolehlivým vyjádřením polohy bodů trasy jsou jejich souřadnice. Z nich lze jednotlivé body kdykoliv vytyčit nebo obnovit z vytyčovací sítě. Poloha bodů se zpravidla určuje v souřadnicích v systému S-JTSK, výšky vytyčovaných bodů se určují v systému Bpv.

Při vytyčování prostorové polohy komunikace se vytyčují hlavní body trasy (HB), popř. charakteristické body (u mostů a tunelů) a určují se výšky hlavních výškových bodů (HVB). Hlavní body trasy rozdělují trasu komunikace na úseky o délce 150 m až 500 m podle druhu stavby. Se vzrůstající návrhovou rychlostí se zvětšují poloměry a tím i délky oblouků a tečen. Při podrobném vytyčování se určují body v trase komunikace ve vzdálenostech, daných typem stavby (nejčastěji 20 m).

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat některými postupy a dosud nevyloženými úlohami, které se uplatňují při vytyčování tras liniových staveb, a to souřadnicovým řešením oblouků kružnice, přechodnic a zakružovacími oblouky lomu nivelety, které nachází uplatnění i v projektech pozemkových úprav [25].

1.1 KRUŽNICOVÉ OBLOUKY

V textu této kapitoly je používána (s ohledem na popis obrázků) symbolika železničního stavitelství. K základním patří:

t - tečna, jednoznačně definovaná dvojicí bodů P se známými souřadnicemi y , x ,

ZO , KO - body začátku a konce oblouku, tzv. dotykové body, tj. společný bod tečny a oblouku; v silničním stavitelství jsou tytéž body značeny TK (tečna – kružnice) a KT (kružnice – tečna),

VB - průsečík tečen,

S - střed kružnice oblouku,

V - půlící bod (vrchol) oblouku,

r - poloměr kružnice,

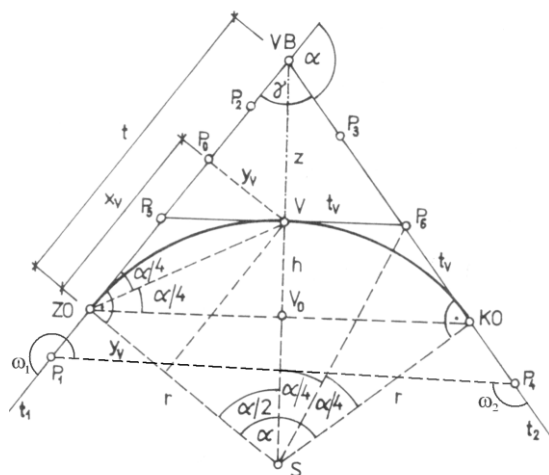
o - délka oblouku,

γ - úhel tečen,

α - středový úhel oblouku.

Připomínáme, že symbolem R je značen pravý úhel ($R = \pi/2 = 100 \text{ gon} = 100^{\text{g}} = 90^{\circ}$). Nezaměňujte jej se symbolem R , který značí poloměr oskulační kružnice klotoidy.

Pro úplnost problematiky, probírané v této kapitole, jsou za pomoci obr. 4.1 zopakovány základní vztahy mezi prvky prostého kružnicového oblouku].



Obr. 4.1

Na vrcholovém bodě VB zjistíme úhel tečen γ (např. přímým měřením v terénu) a pomocí něho určíme středový úhel α :

$$\alpha = 200 \text{ gon} - \gamma . \quad (4.1)$$

Pokud je průsečík tečen nepřístupný (leží např. v budově, lese, vodě, apod.), nelze určit úhel tečen γ přímo. Pro nepřímé určení úhlu tečen se zvolí na každé z tečen jeden vhodný bod, mezi nimiž je přímá viditelnost, např. v obr. 4.1 body P_1 a P_4 . Na těchto bodech se zaměří od bodu na tečny (tj. bezpečně v přímé) na zvolený bod na druhé tečně a tím získáme úhel ω_1 , resp. ω_2 . V trojúhelníku VB, P_1, P_4 platí: $\gamma = 2R - (\omega_1 - 2R) - (2R - \omega_2)$. Ve složitějších případech je nutno mezi body P_1 a P_4 volit pouze úhlově měřené polygonový pořad. Součet vnitřních úhlů uzavřeného n -úhelníka je $(n-2)2R$.

Poté lze při zadaném poloměru r vypočítat potřebné hlavní prvky oblouku:

1. délka tečny $t = ZO-VB = KO-VB$:

$$t = r \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) , \quad (4.2)$$

2. půlicí bod oblouku V lze vytyčit:

- a) polárně z průsečíku tečen VB po symetrále úhlu γ pomocí vzdálenosti z

$$z = r \left(\frac{1}{\cos(\alpha/2)} - 1 \right) , \quad (4.3)$$

- b) pravoúhlými souřadnicemi od tečny (z dotykových bodů)

$$x_v = r \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) , \quad (4.4)$$

$$y_v = r \cdot \left\{ 1 - \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right\} , \quad (4.5)$$

- c) na tečně k oblouku v bodě V

$$t_v = ZO-P_5 = P_5-V = r \cdot \operatorname{tg} (\alpha/4) , \text{ ale také } t_v = 1/2(P_5-P_6) , \quad (4.6)$$

- d) pravoúhlými souřadnicemi od tětivy pomocí hodnoty $ZO-V_0 = V_0-KO = 1/2(ZO-KO)$ a vzepětí h

$$h = r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right), \quad (4.7)$$

3. délka oblouku:

$$o = r \cdot \text{arc } \alpha. \quad (4.8)$$

Postupy výpočtu a vytyčování podrobných bodů jsou uvedeny ve skriptech [1] a v literatuře v nich uvedené. Metodu lze samozřejmě přiměřeně aplikovat i na kružnicové oblouky např. v zahradní architektuře nebo ve stavebních technologiích.

1.1.1 Určování hlavních prvků prostého oblouku

Pro jednoznačné určení oblouku, složeného z n kružnic, je podmínkou znalost právě postačujícího a nutného počtu prvků:

$$p = (2n+1). \quad (4.9)$$

Oblouk kružnice je tedy definován třemi prvky ($n = 1$). Pokud je znám větší počet prvků, je nutno na základě inženýrské úvahy vybrat právě jen tři nejvýznamnější. Nejčastěji se různě kombinují tečna, bod a poloměr. Volba tečen zaručuje návaznost úpravy na starý stav, volba poloměru reaguje na požadavky úpravy rychlosti nebo konstrukce vozidel, volba bodu vyjadřuje podmínku zachování určitého prvku (mostek, bezpečnostní zařízení apod.). Podrobnosti uvádí např. [10].

Ze tří daných prvků se počítají další prvky, nutné k výpočtu souřadnic hlavních bodů a hlavních prvků oblouku. Postupy, které se při výpočtech používají, byly vysvětleny v předchozích přednáškách geodézie. Zde budou převážně jen slovně naznačena řešení základních úloh, vyskytujících se v praxi. Proto v textu této kapitoly nejsou vzorce číslovány, protože by tím byla podle názoru autora snížena přehlednost a čitelnost textu.

a) Oblouk kružnice je dán dvěma tečnami a poloměrem

Je dán poloměr oblouku r , tečny jsou určeny body P_1, P_2, P_3, P_4 v pravoúhlých souřadnicích y, x (obr. 4.2). Je třeba určit souřadnice bodů VB, ZO, KO, S , úhel α , délku t a o .

Ze souřadnic bodů P_1, P_2, P_3, P_4 vypočteme směrníky tečen σ_1, σ_2 a z nich úhly γ, α :

$$\gamma = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \alpha = 2R - \gamma.$$

Protínáním vpřed se vypočtou souřadnice průsečíku tečen VB . Délka tečny $t \equiv \overline{ZOV B} = \overline{KOV B}$

$$t = r \cdot \text{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = r \cdot \text{cotg} \left(\frac{\gamma}{2} \right).$$

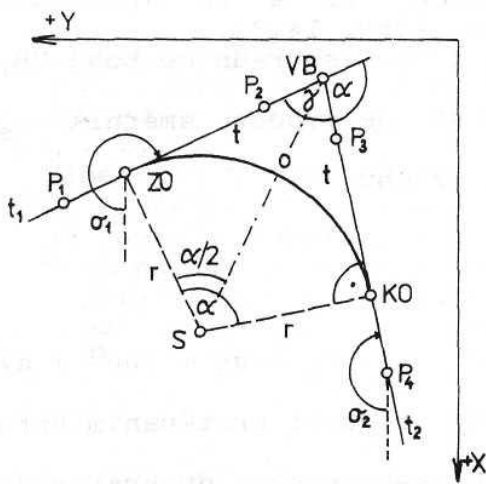
Souřadnice dotykových bodů ZO a KO se vypočtou jako body na přímkách t_1 , a t_2 ve vzdálenosti t od průsečíku tečen VB . Z dotykových bodů ZO a KO se vypočtou rajónem dvakrát souřadnice středu S . (Poznámka: např. směrník $\sigma_{ZO-S} = \sigma_1 + R$.)

Délka oblouku o :

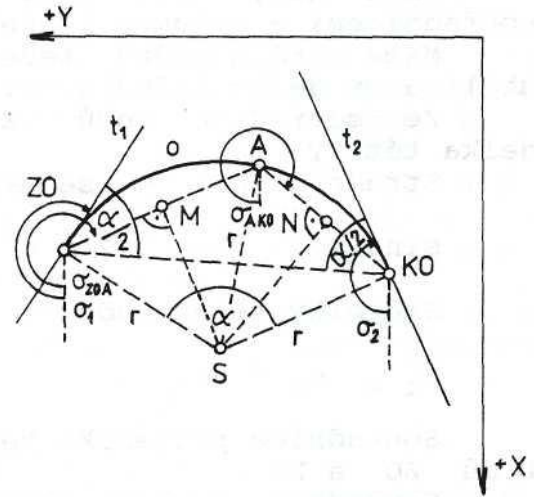
$$o = r \cdot \text{arc } \alpha = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{2R} = \frac{r \cdot \alpha}{\rho}.$$

b) Oblouk kružnice je dán tečnou s dotykovým bodem a druhou tečnou

Tečna t_1 je dána body ZO a P_2 , tečna t_2 je dána body P_3 a P_4 (obr. 4.2). Je třeba určit souřadnice bodů VB , KO , S , úhel α , poloměr r a délky t a o . Řešení je stejné jako v předešlém



Obr. 4.2



Obr. 4.3

případu s tím rozdílem, že délku tečny t vypočteme Pythagorovou větou ze souřadnic bodů VB , ZO a poloměr kružnice ze vztahu

$$r = t \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = t \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

c) Oblouk kružnice je dán třemi body

Jsou dány tři body kružnice ZO , KO , A svými pravoúhlými souřadnicemi (obr. 3). Je třeba určit souřadnice bodů VB , S , směry tečen t_1 , a t_2 , úhel α , poloměr r a délku oblouku o .

Ze souřadnic daných bodů vypočteme směrníky tětiv σ_{ZO-A} , σ_{A-KO} , σ_{ZO-KO} . Snadno získáme souřadnice bodů M a N , ležících v polovině tětiv:

$$y_M = \frac{y_{ZO} + y_A}{2}, \quad x_M = \frac{x_{ZO} + x_A}{2},$$

a podobně y_N a x_N . Protínáním vpřed z bodů M , N vypočteme souřadnice středu S , přičemž

$$\sigma_{MS} = \sigma_{ZO-A} + R,$$

$$\sigma_{NS} = \sigma_{A-KO} + R.$$

Poloměr kružnice r se určí třikrát Pythagorovou větou ze souřadnic středu S a bodů ZO , A , KO . Rozdíl může být způsoben jen zaokrouhlováním. Středový úhel α se určí z rozdílu směrníků:

$$\alpha = \sigma_{S-KO} - \sigma_{S-ZO}.$$

Směrníky tečen:

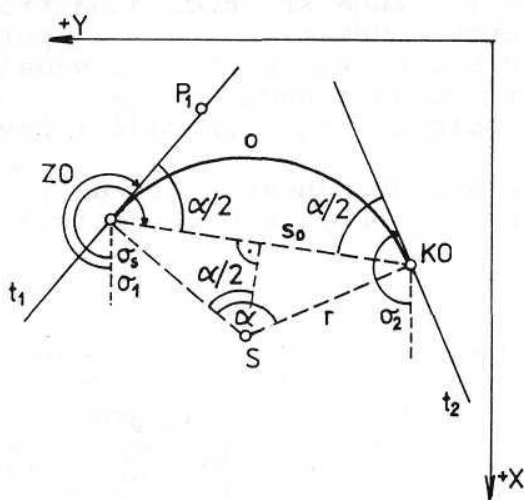
$$\sigma_1 = \sigma_{ZO-KO} - \frac{\alpha}{2},$$

$$\sigma_2 = \sigma_{KO-ZO} + \frac{\alpha}{2}.$$

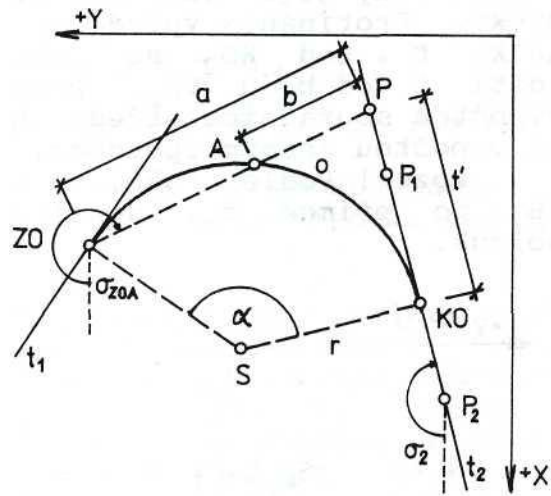
Souřadnice průsečíku tečen VB se vypočtou protínáním vpřed z bodů ZO , KO . Délka oblouku se vypočte stejně jako v úloze a).

d) Oblouk kružnice je dán dvěma body a poloměrem

Jsou dány dva body kružnice ZO a KO pravouhlými souřadnicemi a poloměr kružnice r (obr. 4.4). Máme určit směry tečen t_1 a t_2 , souřadnice bodů VB , S , úhel α a délku oblouku o .



Obr. 4.4



Obr 4.5

Ze souřadnic bodů ZO , KO se vypočte směrník σ_s a délka tětiny s_0 . Středový úhel α se určí ze vztahu:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s_0}{2r}.$$

Směrníky tečen:

$$\sigma_1 = \sigma_s - \frac{\alpha}{2},$$

$$\sigma_2 = \sigma_s + 2R + \frac{\alpha}{2}.$$

Souřadnice průsečíku tečen VB se určí protínáním vpřed z bodů ZO , KO . Souřadnice středu kružnice S se vypočtou dvakrát rajónem z bodů ZO , KO . Délka oblouku o se vypočte stejně jako v předchozí úloze.

e) Oblouk kružnice je dán tečnou s bodem dotyku a dalším bodem

Je dána tečna t_1 body ZO a P_1 a druhý dotykový bod KO (obr. 4.5). Máme určit směr tečny t_2 , body VB a S , úhel α , poloměr r a délku oblouku o .

Ze souřadnic daných bodů se vypočtou směrníky σ_1 a σ_s . Středový úhel α bude:

$$\alpha = 2 \cdot (\sigma_s - \sigma_1).$$

Poloměr kružnice:

$$r = \frac{s_0}{2 \cdot \sin(\alpha/2)}.$$

Další řešení je stejné jako v předchozí úloze.

f) Oblouk kružnice je dán dvěma body a tečnou

Jsou dány dva body kružnice ZO , A pravouhlými souřadnicemi, tečna t_2 je dána souřadnicemi dvou bodů P_1 a P_2 (obr. 4.5). Máme určit směr tečny t_1 souřadnice bodů KO , VB , S , poloměr kružnice r , délku oblouku o a středový úhel α . Ze souřadnic daných bodů vypočteme směrníky σ_{ZO-A} a σ_2 .

Protínáním vpřed vypočítáme souřadnice bodu P . Z příslušných souřadnicových rozdílů vypočteme délky a , b . Použitím poučky o mocnosti bodu ke kružnici vypočteme délku t' na tečně t_2 ze vztahu:

$$t'^2 = a \cdot b .$$

Souřadnice bodu KO vypočteme na přímce t_2 ve vzdálenosti t' od bodu P . Další řešení je stejné jako u kružnice, dané třemi body - viz *c*).

1.1.2 Určování hlavních prvků složených kružnicových oblouků

Pro technicky účinné a z hlediska tvorby krajiny vyhovující vložení trasy do terénu se používají oblouky složené z více kružnic větších poloměrů, bez vložených přechodnic a mezilehlých přímek. (U vodotečí se jedná o obdobu přirozeného meandrování toku.)

Podle vzorce (4.7) je pro jednoznačné určení oblouku, složeného z n kružnic, i pro každou z nich, zapotřebí $(2n+1)$ prvků. Možností geometrického zadání je řada, ale ne všechna mají i technický význam. Za základní rozhodnutí lze považovat *volbu stejnosměrného nebo protisměrného oblouku*, podmínky pro toto rozhodnutí jsou uvedeny v případě *g*). Je třeba poznamenat, že některá zadání nejsou matematicky řešitelná, nebo výsledek je technicky nepřijatelný (např. poloměr vyjde záporný).

V této kapitole budou uvedeny nejjednodušší základní úlohy. V dalším textu se budeme zabývat oblouky, složenými jen ze dvou kružnic. Řešení vždy začíná kružnicí, která je dána úplně, tj. třemi podmínkami.

g) Oblouk první kružnice je dán třemi prvky, oblouk druhé kružnice je dán začátkem oblouku a tečnou

Je dána tečna t_1 body P_1 a ZO_1 (je druhým prvkem), konec prvního oblouku $KO_1 \equiv ZO_2$ a tečna t_2 , daná body P_2 a P_3 (obr. 4.6). Je třeba určit KO_2 , S_1 , r_1 , S_2 , r_2 , o_1 , o_2 .

Z daných prvků první kružnice se určí směrníky σ_1 , $\sigma_{ZO_1-KO_1}$, jejich rozdílem úhel $\alpha_1/2$ a pak protínáním vpřed střed S_1 a poloměr r_1 . Tečna t_3 je kolmá ke spojnici S_1-KO_1 , známe tedy její směrník. Tím je i druhá kružnice dána třemi prvky. Protínáním vpřed se vypočtou souřadnice VB_2 a potom délka t . Bod KO_2 se určí jako bod na tečně t_2 ve vzdálenosti t od bodu VB_2 . Protínáním vpřed z bodů ZO_2 a KO_2 se vypočtou souřadnice středu S_2 a poloměr r_2 . Zbývající prvky se vypočtou známým způsobem odst. 4.2.1.

Poznámka 1: Podle toho, na kterou stranu nanese se délku t od VB_2 po přímce t_2 , dostaneme stejnoměrný nebo protisměrný oblouk.

Poznámka 2: Pokud v zadání nahradíme bod $KO_1 \equiv ZO_2$ bodem na oblouku A , bude možno použít *stejnosměrný oblouk* tehdy, pokud platí:

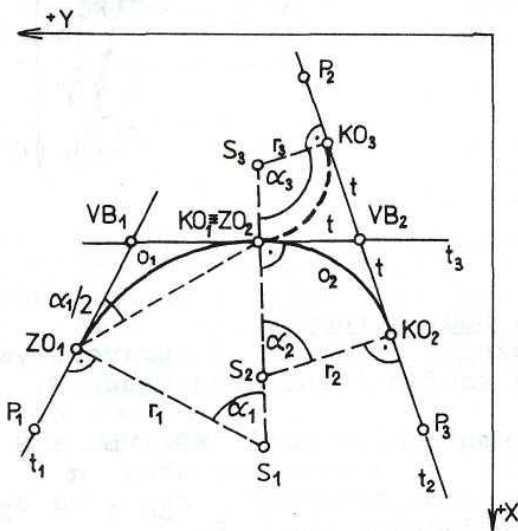
$$\sigma_{ZO_1-A} < \sigma_1 + R - \gamma/2.$$

V opačném případě lze spojit obě tečny pouze protisměrným obloukem.

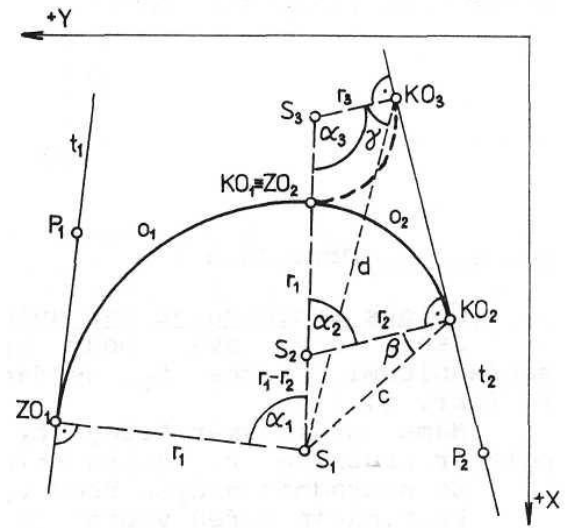
h) Oblouk první kružnice je dán třemi prvky, oblouk druhé kružnice tečnou s dotykovým bodem

Je dán poloměr r_1 a tečna t_1 první kružnice body P_1 a ZO_1 , a tečna druhé kružnice t_2 body P_2 a KO_2 , navrhujeme-li stejnosměrný oblouk. V případě protisměrného oblouku je dán konec druhého oblouku KO_3 . (Obr. 4.7).

Jde-li o stejnosměrný oblouk, máme určit $S_1, S_2, r_2, \alpha_1, \alpha_2, KO_1 \equiv ZO_2, o_1, o_2$. Střed první kružnice S_1 se určí rajónem z bodu ZO_1 .



Obr. 4.6



Obr. 4.7

Ze souřadnic bodů S_1 a KO_2 se vypočte Pythagorovou větou strana c trojúhelníka S_1, S_2, KO_2 a z rozdílu směrníků úhel β :

$$\beta = \sigma_{KO_2-S_2} - \sigma_{KO_2-S_1}.$$

Poloměr r_2 se vypočte kosinovou větou ze vztahu

$$(r_1 - r_2)^2 = c^2 + r_2^2 - 2 c r_2 \cdot \cos \beta,$$

a z toho po úpravě

$$r_2 = \frac{r_1^2 - c^2}{2(r_1 - c \cdot \cos \beta)}.$$

Střed druhé kružnice S_2 lze vypočítat rajónem z bodu KO_2 . Středové úhly se určí z rozdílu směrníků:

$$\alpha_1 = \sigma_{S_1-S_2} - \sigma_{S_1-ZO_1},$$

$$\alpha_2 = \sigma_{S_2-KO_2} - \sigma_{S_1-S_2}.$$

Souřadnice bodu $KO_1 \equiv ZO_2$ se vypočtou dvakrát rajónem z bodů S_1 a S_2 . Délky oblouků o_1 a o_2 se vypočtou již známým způsobem.

V případě protisměrného oblouku je postup výpočtu obdobný a je patrný z obr. 4.7.

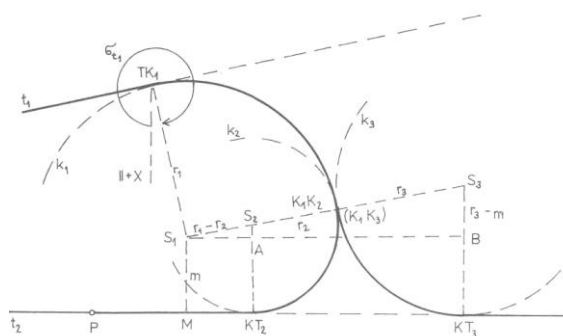
i) Oblouk první kružnice je dán třemi prvky, oblouk druhé kružnice koncem oblouku a poloměrem

Je dána tečna prvního oblouku t body P_1 a ZO_1 , poloměr r_1 , konec druhého oblouku KO_2 a poloměr r_2 , jde-li o stejnosměrný oblouk. V případě protisměrného oblouku je oblouk druhé kružnice dán bodem KO_3 a poloměrem r_3 (obr. 4.7).

Řešení je obdobné jako v předchozí úloze. Při řešení trojúhelníka S_1, S_2, KO_2 (popř. S_1, S_3, KO_3) však počítáme kosinovou větou úhel β (γ), který může být kladný nebo záporný. Zda vypočtený úhel budeme při výpočtu směrníku normály $\sigma_{KO_2-S_2}$ ($\sigma_{KO_3-S_3}$) přičítat či odečítat od směrníku spojnice $\sigma_{KO_2-S_1}$ ($\sigma_{KO_3-S_1}$), vyplyne ze situace. Je-li určen směrník normály, známe i směrník tečny t_2 .

j) Oblouk první kružnice je dán třemi prvky, oblouk druhé kružnice tečnou a poloměrem

Jsou dány tečny t_1, t_2 , bod dotyku TK_1 , poloměr r_1 a alternativně poloměr r_2 pro stejnosměrný oblouk nebo r_3 pro protisměrný oblouk. Řešení je analytické, tečny jsou zadány dvojicemi souřadnicově určených bodů P .



Obr. 4.8

Řešení k_1 :

- střed S_1 se vypočte rajonem z TK_1 ($\sigma_{TK_1, S_1} = \sigma_{t_1} + R; r_1$),

- bod M se vypočte protínáním vpřed z bodu S_1 a směrníku $\sigma_{S_1, M} = \sigma_{t_2} + R$ a z bodu P tečny t_2 a směrníku σ_{t_2} , příp. alternativně spuštěním kolmice z bodu S_1 na tečnu t_2 ,

- ze souřadnic bodů S_1, M se vypočte délka m .

Alternativa I - řešení k_2 :

- z $\Delta S_1 S_2 A$ se vypočte

$$a = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 - (r_2 - m)^2} = S_1 - A,$$

- bod KT_2 se určí jako bod na přímce ve vzdálenosti a od bodu M ,

- bod S_2 je bodem na kolmici r_2 k tečně t_2 v bodě KT_2 ,

- bod $K_1 K_2$ se určí pomocí r_1 v prodloužení úsečky $S_1 - S_2$; kontrolou je $S_2 - K_1 K_2 = r_2$.

Alternativa II - řešení k_3 :

- z $\Delta S_1 S_3 B$ se vypočte

$$b = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_3 - m)^2} = S_1 - B,$$

- body KT_3, S_3 a $K_1 K_3$ se určí obdobně jako v alternativě I.

1.1.3 Úprava křížení komunikací složenými oblouky

Složených oblouků lze použít pro dosažení pravoúhlého křížení os dvou liniových inženýrských staveb t_1, t_3 (komunikací, vodotečí, dálkových vedení), jejichž dosavadní tečny (osy) t_1, t_2 svírají ostrý (obecný) úhel. Pro pozemkové úpravy se zpravidla jedná o úpravu křižovatky dvou pozemních komunikací, u nichž je ještě nutno do trasy vedlejší komunikace (např. polní cesty) vložit z bezpečnostních důvodů před křížením přímé úseky h , odpovídající délce rozhledu pro zastavení [25]. Této podmínce lze vyhovět dvěma protisměrnými

složenými kružnicovými oblouky, umístěnými v úsecích vlevo a vpravo od nezměněné polohy t_1 nadřazené komunikace (obr. 4.9). Řešení naznačuje následující příklad.

V I. úseku je podle obr. 4.9 dáno t_1, t_2 , a v důsledku podmínky zařazení úseku h , dané příslušnými normami, vlastně také KO_2 , v II. úseku je kromě t_1, t_2 analogicky dáno ZO_3 .

Řešení: Podle místních podmínek na základě inženýrské rozvahy se vhodně doplní počet nutných parametrů, např. v I. úseku (obvykle) volbou r_1, r_2 a ve II. úseku např. r_3, KO_4 .

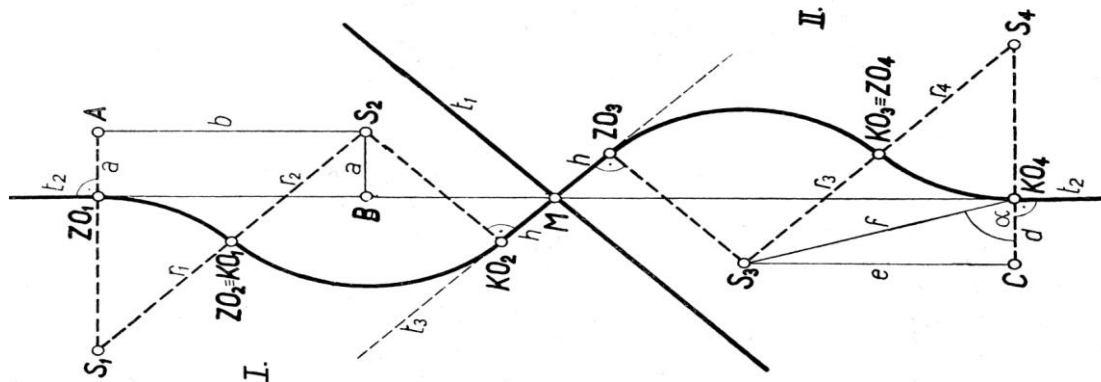
VI. úseku:

- protínáním vpřed se ze směrniců σ_1, σ_2 os t_1, t_2 vypočtou souřadnice bodu M ,
- osa (tečna) t_3 je určena bodem M a směrníkem $\sigma_3 = \sigma_2 + R$,
- bod KO_2 , ležící na t_3 , se vypočte rajónem z bodu M ,
- bod S_2 leží na kolmici k t_3 v bodě KO_2 ve vzdálenosti r_2 ,
- pro výpočet souřadnic S_1 se protínáním vpřed z bodů M, S_2 vypočte bod B a dále délky $a = BS_2, c = MB$ a z $\triangle S_1S_2A$ délka b

$$b = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 \pm a)^2},$$

kde ve 2. členu platí znaménko *plus* pokud leží bod S_2 na pravé straně tečny t_2 , znaménko *minus* v případě, že S_2 leží vlevo,

- bod ZO_1 se vypočte rajónem z bodu M po t_2 ve vzdálenosti $(b+c)$,
- S_1 je bod na kolmici k t_2 v bodě ZO_1 , kontrola: $S_1S_2 = r_1 + r_2$,
- bod $KO_1 \equiv ZO_2$ se vypočte jako bod na přímce S_1S_2 .



Obr. 4.9

Ve II. úseku:

- souřadnice bodů ZO_3 a S_3 se vypočtou analogicky řešení I. úseku,
- v $\triangle S_3S_4C$ a $\triangle S_3KO_4C$ se vypočte $f = S_3KO_4$, z rozdílu směrniců úhel α a dále

$$r_4 = \frac{f^2 - r_3^2}{2(r_3 - d)}, \text{ pokud by } S_3 \text{ leželo vpravo od } t_2, \text{ změní se jmenovatel na tvar } 2(r_3 + d),$$

přičemž pro odvození platí

$$(r_3 + r_4)^2 = (r_4 + d)^2 + e^2, \text{ po úpravě } (2r_3r_4 - 2r_4d) = (d^2 + e^2 - r_3^2),$$

$$d^2 + e^2 = f^2,$$

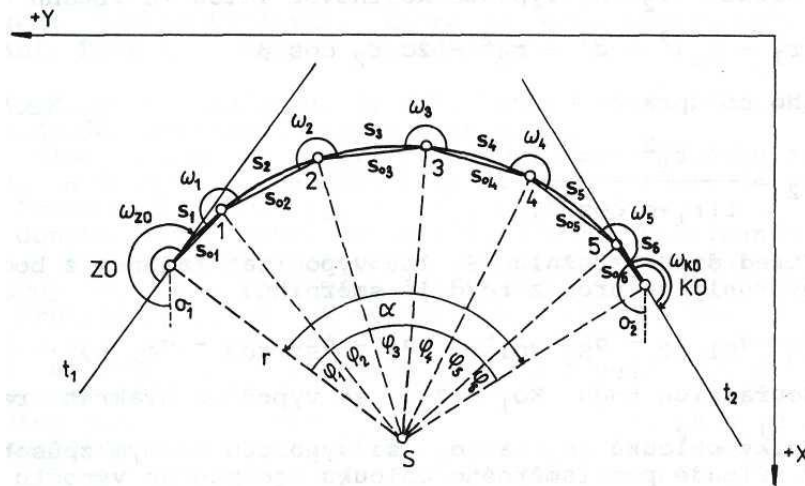
$$d = f \cdot \cos \alpha,$$

- střed S_4 se vypočte jako bod na kolmici o délce r_4 k tečně t_2 v bodě KO_4 ,
- bod $KO_3 \equiv ZO_4$ se vypočte jako bod na spojnici S_3S_4 pomocí r_3, r_4 .

1.1.4 Určování podrobných bodů oblouku kružnice

Výhoda určení podrobných bodů oblouku kružnice v souřadnicích spočívá v tom, že souřadnice lze transformovat na libovolnou vhodnou přímku (stranu vytyčovací sítě) a od ní vytyčovat v terénu podrobné body, dnes nejčastěji polární metodou s použitím totální stanice, nebo už méně často klasickou ortogonální metodou.

Nejvýhodnější je spojit podrobné body oblouku kružnice do polygonového pořadu, připojeného oboustranně polohově i směrově na dotykové body (ZO, KO) a tečny, dané v souřadnicích.



Obr. 4.10

V současné praxi je běžné, že podrobné body oblouku jsou vytyčovány v průběžném staničení vzhledem k začátku celé trasy nebo dílčí úpravy. Potom první a poslední úsek oblouku (první a poslední strana polygonového pořadu) a vrcholové úhly na začátku a na konci pořadu budou mít obecnou velikost, odlišnou od ostatních. Řešení je patrné z obr. 4.10.

Vypočtou se délky úseků oblouku s_i mezi podrobnými body (rozdíl staničení sousedních bodů). První úsek (s_1) a poslední úsek (v obrázku označen s_6) oblouku mají obecnou velikost, ostatní úseky (s_2 až s_5) jsou stejné. Vypočtou se středové úhly, odpovídající jednotlivým úsekům oblouku:

$$\varphi_i^s = \frac{s_i}{r} \cdot \rho .$$

Kontrola výpočtu: $[\varphi] = \alpha$. Vypočtou se levostranné vrcholové úhly ω_i na podrobných bodech:

$$\omega_{ZO} = 2R + \frac{\varphi}{2} ,$$

$$\omega_5 = 2R + \frac{(\varphi_5 + \varphi_6)}{2} ,$$

$$\omega_1 = 2R + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} ,$$

$$\omega_{KO} = 2R + \frac{\varphi_6}{2} ,$$

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 2R + \varphi_2 , \text{ protože}$$

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 .$$

Délky tětiv s_{oi} se vypočtou:

$$s_{oi} = 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) \cong s_i - \frac{s_i^3}{24 \cdot r^2}.$$

Protože pořad je vetknutý a oboustranně orientovaný, musí být splněny kontroly:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_1 + [\omega] - n \cdot 2R, \\ y_{KO} &= y_{ZO} + [s_o \cdot \sin\sigma], \\ x_{KO} &= x_{ZO} + [s_o \cdot \cos\sigma]. \end{aligned}$$

Všechny veličiny jsou vypočtené (neměřené). Případné odchylky v uzávěrech musí být proto vysvětlitelné pouze zaokrouhlováním.

Polygonový pořad může někdy mít (zejména při místních drobných úpravách) všechny strany stejně dlouhé (celý oblouk je rozdělen na n stejných úseků), potom budou všechny vrcholové úhly pořadu stejné.

Pro použití totální stanice přepočteme známým postupem takto získané pravouhlé souřadnice podrobných bodů kružnice na polární souřadnice s počátkem v bodě ZO , KO , u plochých oblouků v bodě VB , a s orientací vloženou do jedné z tečen. Obdobně lze ovšem vypočítat polární souřadnice pro vytyčování podrobných bodů z bodů vytyčovací sítě apod.

1.2 PŘECHODNICE DOPRAVNÍCH STAVEB

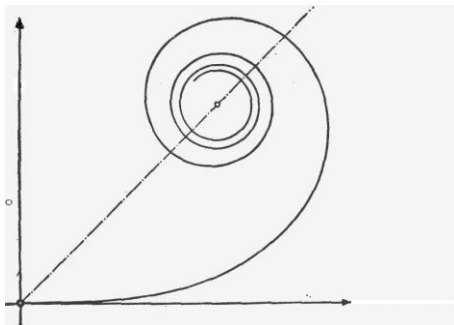
Přejede-li rychle se pohybující vozidlo z přímé dráhy do oblouku o poloměru r , je vystaveno účinkům odstředivé síly, která roste se zvyšující se rychlostí a zmenšujícím se poloměrem. Aby přechod byl plynulý, vkládá se mezi přímou (tečnu) a oblouk kružnice o poloměru r křivka zvaná *přechodnice*, která plynule mění svou křivost v závislosti na délce od hodnoty $k = 0$ do hodnoty $k = 1/r$. V tomto případě hovoříme o *krajní přechodnici*.

Jde-li o stejnosměrný složený oblouk, kde jízdní dráha přechází z oblouku o poloměru r_1 do oblouku o poloměru r_2 , vkládáme mezi oba oblouky *mezilehlou přechodnici*, která mění plynule křivost z hodnoty $k_1 = 1/r_1$ do hodnoty $k_2 = 1/r_2$.

Dynamickým účinkům odstředivé síly při projíždění obloukem se čelí *příčným sklonem* jízdní dráhy (silnice se klopí, na železnici se převyšuje vnější kolejnice). Převýšení (příčný sklon) se mění plynule ve *vzestupnici*, která se obvykle vkládá do přechodnice.

V dopravním stavitelství se používají zpravidla jako přechodnice klotoida (u silnic) a kubická parabola (na železnici).

1.2.1 Klotoida



Obr. 4.11

Klotoida je křivka, jejíž křivost narůstá lineárně s délkou oblouku (obr. 4.11). Její přirozená rovnice je dána vztahem

$$k = a \cdot s, \quad (4.10)$$

kde k je křivost křivky v daném bodě,
 s je délka křivky,
 a je parametr křivky (konstanta větší než nula).

V silničním stavitelství se používá přirozená rovnice klotoidy zapsaná v tradiční symbolice ve tvaru

$$LR = A^2, \quad (4.11)$$

kde L je délka křivky (přechodnice) od bodu TP ,

R je poloměr křivosti křivky v daném bodě,
 A je parametr (konstanta).

S uvažáním, že křivost křivky $k = L/R$, bude přirozená rovnice klotoidy psána ve tvaru

$$k = \frac{L}{A^2} . \quad (4.11a)$$

Poznámka: pro délku přechodnice L se často používá vztah $L = v$, kde v je projektovaná návrhová rychlost komunikace v km/h.

1.2.1.1 Odvození hlavních prvků klotoidy

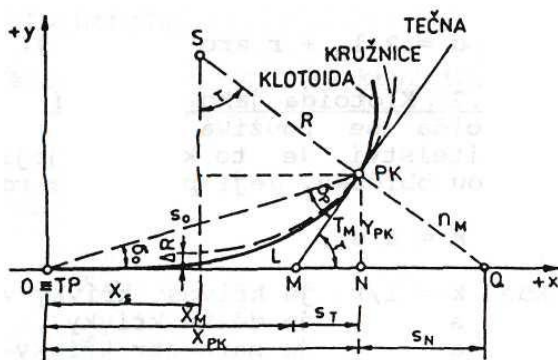
Při odvození použijeme souřadnicový systém, užívaný v matematice a veličiny budeme označovat tak, jak je zavedeno v silničním stavitelství. Počátek souřadnicové soustavy umístíme do inflexního bodu klotoidy a kladnou větev osy x ztotožníme s tečnou k přechodnici (obr. 4.13). Budeme uvažovat kladnou větev klotoidy a z ní část od inflexního bodu TP k bodu C , ve kterém je tečna ke klotoidě kolmá na osu $+x \equiv t$.

Přirozená rovnice klotoidy (4.10) umožňuje počítat křivost klotoidy v každém jejím bodě. Nás budou ale při vytyčování zajímat pravoúhlé souřadnice bodů klotoidy ve zvoleném souřadnicovém systému. Ortogonální souřadnice jednotlivých bodů křivky jsou dány parametrickými rovnicemi, známými z diferenciální geometrie, které vznikly z přirozené rovnice. Dosaďme-li do nich za křivost výraz (4.11), dostaneme po úpravě výrazy pro souřadnice bodu na konci klotoidy

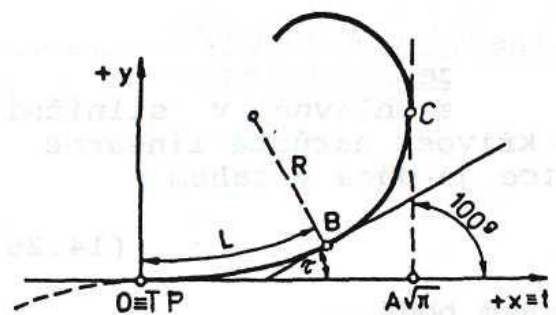
$$X = L - \frac{L^5}{40A^4} + \frac{L^9}{3456A^8} - (13) \quad (4.12)$$

$$Y = \frac{L^3}{6A^2} - \frac{L^7}{336A^6} + \frac{L^{11}}{42240A^{10}} - (15).$$

Ve vzorcích (4.12) a v dalších vzorcích v tomto odstavci znamená výraz (13), resp. (15), neuvažované členy 13., resp. 15. a vyšších řádů.



Obr. 4.12



Obr. 4.13

Pomocí rovnic (4.12) lze počítat pravoúhlé souřadnice bodů klotoidy při vytyčování od tečny v inflexním bodě TP . Pravoúhlé souřadnice X, Y lze přepočítat na polární σ_0, s_0 podle rovnic (4.24) a (4.26) a vytyčovat body přechodnice polární metodou z inflexního bodu.

Úhel τ , který svírá tečna ke klotoidě v daném bodě s kladným směrem osy x (obr. 4.12 a obr. 4.14) je dán vztahem

$$\tau = \frac{L^2}{2A^2} \rho = \frac{L}{2R} \rho . \quad (4.13)$$

Aby bylo možno vložit přechodnici mezi přímkou a oblouk kružnice (obr. 4.13), je třeba při zachování tečen odsadit kružnici od tečen o hodnotu

$$\Delta R = Y_{PK} - R(1 - \cos \tau) , \quad (4.14)$$

nebo po dosazení

$$\Delta R = \frac{L^3}{24A^2} - \frac{L^7}{2688A^6} + \frac{L^{11}}{506880A^{10}} - (15) . \quad (4.15)$$

Souřadnice středu S oskulační kružnice v bodě PK jsou

$$X_S = X_{PK} - R \sin \tau , \quad (4.16)$$

nebo po dosazení

$$X_S = \frac{L}{2} - \frac{L^5}{240A^4} + \frac{L^9}{34560A^8} - (13) \quad (4.17)$$

a

$$Y_S = R + \Delta R = Y_{PK} + R \cos \tau , \quad (4.18)$$

nebo po dosazení

$$Y_S = R - \frac{L^3}{24A^2} - \frac{L^7}{2688A^6} + \frac{L^{11}}{506880A^{10}} - (15) . \quad (4.19)$$

Délka tečny $T_M = \overline{M PK}$:

$$T_M = \frac{Y_{PK}}{\sin \tau} . \quad (4.20)$$

Délka subtangenty $s_T \equiv \overline{MN}$:

$$s_T = Y_{PK} \cot \tau . \quad (4.21)$$

Délka normály $n_M = \overline{Q PK}$:

$$n_M = \frac{Y_{PK}}{\cos \tau} , \quad (4.22)$$

Délka subnormály $s_N \equiv \overline{N Q}$:

$$s_N = Y_{PK} \cdot \operatorname{tg} \tau . \quad (4.23)$$

Úhel σ_o mezi tětivou $\overline{TP PK}$ a tečnou v bodě TP :

$$\operatorname{tg} \sigma_o = \frac{Y_{PK}}{X_{PK}} . \quad (4.24)$$

Úhel σ_p mezi tečnou v bodě PK a tětivou $\overline{PK TP}$:

$$\sigma_p = \tau - \sigma_o . \quad (4.25)$$

Délka tětivy $s_o \equiv \overline{TPPK}$:

$$s_o = \sqrt{x_{PK}^2 + y_{PK}^2} = \frac{x_{PK}}{\cos \sigma_o} . \quad (4.26)$$

Všechny hlavní prvky klotoidické přechodnice lze počítat podle uvedených vzorců.

1.2.1.2 Výpočet a vytyčení hlavních prvků oblouku kružnice se symetrickými krajními přechodnicemi

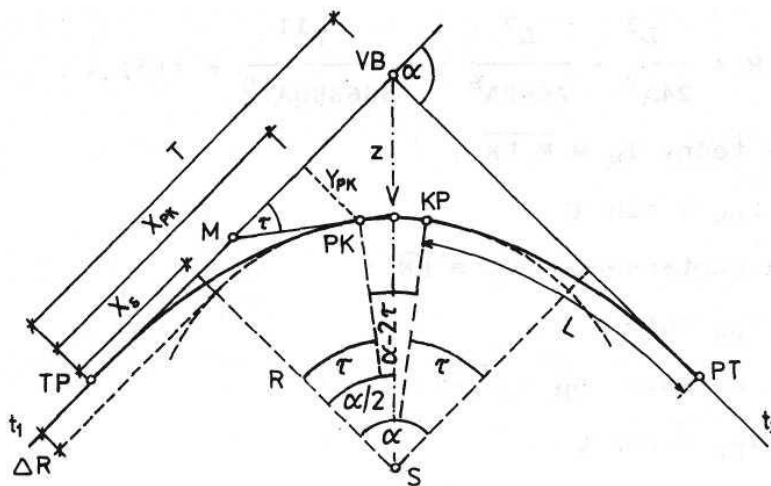
Při odvození potřebných vztahů vyjdeme z obr. 4.14. Délka tečny $T \equiv \overline{TPVB}$

$$T = (R + \Delta R) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + X_S , \quad (4.27)$$

kde R je poloměr kružnice,
 ΔR je odsazení kružnice od tečny,
 α je středový úhel oblouku kružnice,
 X_S je souřadnice středu odsazené kružnice.

Pomocí délky tečny T se vytyčí z bodu VB body TP a PT . Půlící bod oblouku V se vytyčí z bodu VB v ose úhlu tečen ve vzdálenosti $z \equiv \overline{VBV}$:

$$z = \frac{R + \Delta R}{\cos(\alpha/2)} - R . \quad (4.28)$$



Obr. 4.14

Začátek kružnice PK (podobně KP) se vytyčí pravouhlými souřadnicemi X_{PK} a Y_{PK} z bodu TP (PT), vypočtenými z rovnic (4.12) pro délku přechodnice L , nebo polárními souřadnicemi σ_o a s_o podle obr. 4.14 a rovnic (4.24) a (4.26), nebo z bodu M ($X_M = X_{PK} - s_T$) na tečně pomocí úhlu τ a délky T_M (obr. 4.11) podle rovnic (4.13) a (4.20). Tečna v bodě PK je dána body M a PK (obr. 4.14). Délka oblouku o se vypočte:

$$o = 2L + R \cdot \operatorname{arc}(\alpha - 2\tau) . \quad (4.29)$$

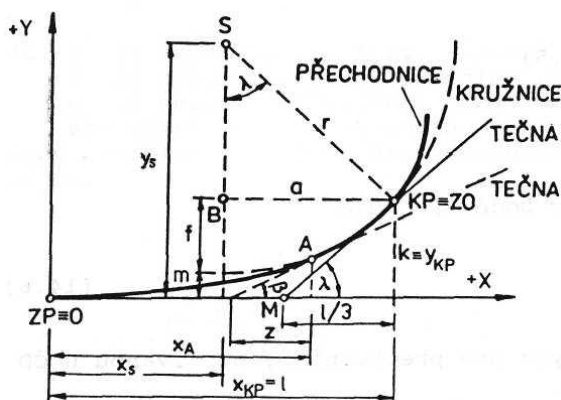
1.2.1.3 Vytyčení podrobných bodů přechodnice

Podrobné body na klotoidě se vytyčují buď pravouhlými souřadnicemi X , Y od tečny v inflexním bodě, vypočtenými podle vztahů (4.12), kde za L se dosadí příslušná délka oblouku, nebo se použije polární metoda. Potom vytyčujeme z inflexního bodu hodnoty σ_o , s_2 ,

vypočtené ze vztahů (4.21) a (4.23), do kterých dosadíme pravoúhlé souřadnice X , Y podrobného bodu.

1.2.2 Kubická parabola

Kubická parabola má styk 7. řádu s klotoidou, oproti níž má však jednodušší některé vzorce pro praktické použití. Nejdůležitější vzorce, využitelné i při realizaci projektů pozemkových úprav, naznačuje další text tohoto odstavce s využitím obr. 4.15.



Obr. 4.15

Křivka, používaná jako přechodnice u ČD i jiných železničních společností, má rovnici

$$y = \gamma \frac{x^3}{6rl}, \quad (4.30)$$

kde

y , x jsou pravoúhlé souřadnice bodu přechodnice vztahované k tečně, l je délka přechodnice v tečně, r je poloměr kružnice,

γ je opravný člen $\gamma = \frac{l}{\cos \lambda}$,

kde λ je úhel tečny v bodě $KP \equiv ZO$.

V obr. 4.15 jsou souřadnicové osy označeny jako v v matematice a jednotlivé veličiny jsou označeny tradiční symbolikou obvyklou u ČD. Pro délku přechodnice opět platí vztah $l \geq v$, kde v je projektovaná traťová rychlost v km/h.

Tečna v obecném bodě A (úhel β) a subtangenta z :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_A}{z} = \gamma \frac{x_A^3}{2rlz}, \quad (4.31)$$

$$z = \frac{x_A}{3}. \quad (4.32)$$

Pro konec přechodnice ($KP \equiv ZO$) je $x_{KP} = l$ a potom

$$z_{KP} = \frac{l}{3}. \quad (4.33)$$

Odsazení oblouku kružnice m :

$$m = k - f = k - r(1 - \cos \lambda) \cong \frac{k}{4}. \quad (4.34)$$

Úhel λ , který svírá tečna v koncovém bodě přechodnice s osou $+X$:

$$\sin \lambda = \frac{l}{2r}. \quad (4.35)$$

Souřadnice středu oskulační kružnice S :

$$x_s = \frac{l}{2}, \quad y_s = r + m. \quad (4.36)$$

1.3 PŘECHODNICE VODNÍCH TOKŮ

Na rozdíl od dopravních staveb není ve vodním stavitelství užívání přechodnic závazné. Směrové změny vodoteče lze realizovat volbou:

- prostých kružnicových oblouků, případně s mezilehlými přínými úseky,
- složených (stejnoseměrných i protiseměrných) kružnicových oblouků se stejnými nebo různými poloměry,
- kružnicových oblouků s krajními přechodnicemi, vhodnými zejména v dlouhých úsecích; přechodnicí užívanou při úpravách vodních toků je lemniskáta,
- přechodnicových oblouků; lemniskátový oblouk může být souměrný a tehdy lze použít úsek křivky od počátku po průsečík se symetralou úhlu tečen. Při volbě nesouměrného lemniskátového oblouku lze použít jakýkoli vhodný úsek křivky.

V mnohých případech se osa úprav vodních toků z praktických důvodů vytyčuje v odsazení - úhlové hodnoty se nemění, délkové údaje jsou konstantně zvětšeny nebo zmenšeny v poměru poloměru skutečného ku poloměru vytyčovanému.

1.3.1 Lemniskáta

Lemniskáta je křivkou 4. řádu (obr. 4.16). Je geometrickým místem bodů, které mají od dvou pevných ohnisek konstantní součin vzdáleností: $m \cdot n = konst.$ S užitím obr. 4.17 platí:

$$l = \frac{a^2}{3r},$$

kde:

a je parametr poloosy lemniskáty,

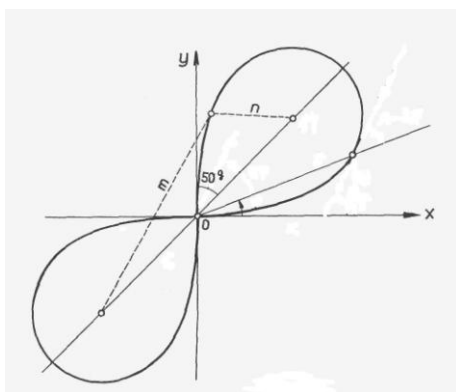
r je poloměr křivosti.

Musí platit:

$$r_{min} = 4B, \quad (4.38)$$

kde B je šířka hladiny při návrhovém průtoku.

Výpočetní vzorce hlavních prvků lemniskáty jsou odvozeny s využitím obr. 4.17, kde 2τ je známý úhel tečen symetrického oblouku, t délka tečny, R pravý úhel.



Obr. 4.16

Polární úhel průvodiče

$$\sigma = \frac{l}{3}(R - \tau), \quad (4.39)$$

úhel mezi poloosou a průvodičem

$$\varphi = \frac{R}{2} - \sigma, \quad (4.40)$$

délka průvodiče

$$l = t \left(\frac{\cos 3\sigma}{\cos 2\sigma} \right), \quad (4.41)$$

parametr lemniskáty

Vzorec pro výpočet délky oblouku l_0 je v literatuře uváděn v dalších podobách, např. jako funkce veličin l , r .

Ze vztahů (4.39) a (4.40) plyne $\sigma + \varphi = R/2$. Pro (4.43) je nutno uvážit (4.38). Důležitými kontrolami je to, že průvodič l svírá s tečnou t_1 úhel σ a s tečnou v daném bodě V úhel 2σ , přičemž (hlavní) tečna t_1 a tečna v daném bodě svírají úhel 3σ (viz trojúhelník ZVM v obr. 4.17) [10].

Hlavní body přechodnice Z , K (začátek a konec) se vytýčí vnesením délky tečny t od průsečíku tečen VB v jejich směru. Hlavní bod V (půlící bod průběžného oblouku) lze vytýčit buď:

- polárními souřadnicemi od tečny pomocí prvků σ , l z bodu Z (K),
- polárními souřadnicemi od tečny pomocí prvků z , τ z bodu VB , přičemž:

$$z = l \cdot \left(\frac{\sin \sigma}{\cos 3\sigma} \right), \quad (4.47)$$

- pravouhlými souřadnicemi (osa $+x \equiv t$) od bodu Z :

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \cos \sigma, \\ y &= l \cdot \sin \sigma. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Podrobné body lemniskáty se vytyčují:

- polárně od tečny z bodu Z (K) pomocí souřadnic σ_i a l_i , přičemž

$$\sigma_i \cong \frac{123,82}{\sqrt{\left(15 \cdot \left(\frac{a}{l_{0i}} \right)^4 + 1 \right)}}; \quad (4.49)$$

v tomto vzorci se úsek křivky l_{0i} volí nebo získá z rozdílu staničení (kilometráže), l_i se vyčíslí dosazením σ_i do (4.41); s ohledem na to, že vzorec (4.49) je přibližný, je pro bod V závazná hodnota ze vzorce (4.39),

- semipolárně pomocí úhlů σ_i a úseků d na oblouku (pomocí cosinové věty):

$$d = \sqrt{\left(l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cdot \cos(\sigma_2 - \sigma_1) \right)}, \quad (4.50)$$

- pravouhle od tečny z bodu Z (K) ze souřadnic x_i , y_i , získaných přepočtem polárních souřadnic σ_i , l_i obdobou (4.48).

1.4 ZAKRUŽOVACÍ OBLOUKY LOMU NIVELETY

Složka trasy komunikace, která určuje její výškové poměry, se nazývá *niveleta*. Její průběh se zobrazuje v *podélném profilu* (viz základní přednášky geodézie).

V místech změny podélného sklonu (lomu) se niveleta zaobluje zakružovacími (výškovými) *vydutými* (tvar U) nebo *vypuklými* (\cap) oblouky, sloužícími k útlumu dynamických účinků na přejíždějící vozidlo. Sklon (spád) p tečny t se značí ve směru staničení (kilometráže) znaménkem *plus* při *stoupání*, znaménkem *mínus* při *klesání*. Zpravidla se vyjadřuje v procentech. Pro převod na svislý úhel α (β), měřený od vodorovné roviny, platí jednoduchý vztah:

$$p \% = 100 \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.51)$$

Křivost zaoblení nivelety závisí kromě tvaru na návrhové rychlosti komunikace a na podmínkách zajištění rozhledu pro zastavení vozidla nebo pro předjíždění. Praxe dává jednoznačně přednost použití oblouku kvadratické paraboly [25], který je jednodušší než kružnicový oblouk. Další text uvádí jedno z možných řešení.

1.4.1 Parabolický zakružovací oblouk

Vrcholová rovnice kvadratické paraboly, symetrické v pravoúhlé souřadnicové soustavě X, Y k ose $+Y$ procházející ohniskem, má tvar $x^2 = 2ay$. Při technicky reálných sklonech tečen t je možno parametr a nahradit poloměrem r_z oskulační kružnice. Ve vrcholu paraboly jsou rozdíly obou křivek zanedbatelné, stejně, jako rozdíly hodnot goniometrických funkcí sinus a tangens úhlů sklonu. Lze psát:

$$x^2 = 2 r_z y. \quad (4.52)$$

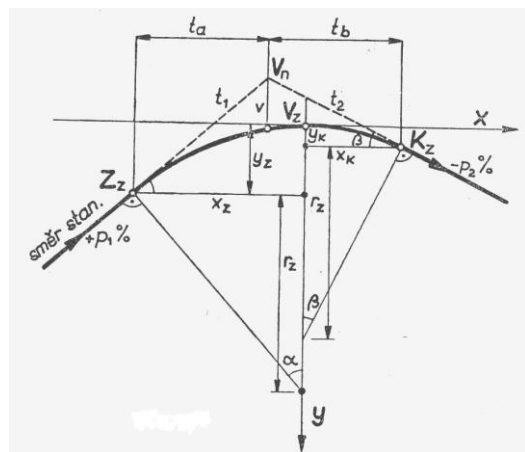
Pro odvození potřebných vztahů jsou dány tečny t_1, t_2 se sklony $p_1\%, p_2\%$ a normám odpovídající poloměr r_z . S pomocí obr. 4.18 a vzorce (4.51) platí:

$$\begin{aligned} x_z &= r_z \operatorname{tg} \alpha = r_z (p_1 / 100) \approx r_z \sin \alpha, \\ x_k &= r_z \operatorname{tg} \beta = r_z (p_2 / 100) \approx r_z \sin \beta. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pro zpevněné polní cesty se pro návrhovou rychlost $v \in \langle 50; 15 \rangle$ km/h minimální r_z pohybuje v intervalu $\langle 600; 50 \rangle$ m a maximální p v intervalu $\langle 10; 15 \rangle$ % pro vydaté i vypuklé oblouky [25]. Kromě toho je obvykle známa výška a staničení průsečíku tečen V_n .

Velmi často se pro průměty t_a, t_b tečen t_1, t_2 do osy X volí pro výpočet staničení zjednodušující podmínka:

$$t_a = t_b = \frac{x_z + x_k}{2} = \frac{r_z (p_1\% - p_2\%)}{200}. \quad (4.54)$$



Obr. 4.18

Pro libovolný bod n oblouku se obvykle volí souřadnice x_n od V_z v okrouhlém kroku 5- 20 m (u vrcholu vždy hustěji) a následně se vypočte

$$y_n = \frac{x_n^2}{2r_z}. \quad (4.55)$$

Úpravou vzorce (4.55) se dosazením x_z, x_k vypočte převýšení y_z vrcholu V_z nad začátkem oblouku Z_z , resp. převýšení y_k nad koncovým bodem K_z .

Úloha je analyticky řešena ve výškovém systému Bpv. Je známa - nebo se dá z tečen vypočítat - tzv. nadmořská výška h_{V_n} průsečíku tečen V_n . Potom lze vypočítat též výšky začátku Z_z ,

konce K_z a vrcholu V_z parabolického zakružovacího oblouku:

$$\begin{aligned} h_{Z_z} &= h_{V_n} \pm t_a \operatorname{tg} \alpha = h_{V_n} \pm p_1 t_a, \\ h_{K_z} &= h_{V_n} \pm t_b \operatorname{tg} \beta = h_{V_n} \pm p_2 t_b, \\ h_{V_z} &= h_{Z_z} \pm y_z = h_{K_z} \pm y_k. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Pro nadmořskou výšku libovolného bodu n platí:

$$h_n = h_{V_z} \pm y_n. \quad (4.57)$$

2 PŘÍKLADY

Připomínáme, že způsob zápisu čísla, udávajícího fyzikální rozměr určité veličiny (např. délku, úhel), charakterizuje jeho přesnost, protože se předpokládá, že poslední platná číslice je zaokrouhlená. Platnou číslicí je samozřejmě i nula. Zápis 52,60 m nemá tedy stejný význam jako zápis 52,6 m nebo naopak 52,600 m.

Při výpočtech je třeba dbát na numerickou stabilitu a vzorce – pokud lze – vhodně upravit. Např. místo $tg \alpha = \delta y / \delta x$, když δx se blíží nule, se použije $cotg \alpha = \delta x / \delta y$.

Přesnost výsledku je rovna nejmenší přesnosti do výpočtu vstupujících členů. (Pokud nějakou vzdálenost odkrojujete a neúplný poslední krok změříte mikrometrem, rozhodně výsledek neuvádějte na setiny mm.) Pro geodetické výpočty platí, že při výpočtech řádově v milimetrech musí být úhly v desetínách nebo celých miligonech (tj. ve vteřinách).

Aby se nehromadily chyby ze zaokrouhlení, je vhodné počítat o jedno desetinné místo víc. Výsledek se uvádí s reálným počtem míst, odpovídajícím přesnosti vstupních veličin. (Je zcela netechnické mechanicky bez zaokrouhlení opisovat všechny číslice za desetinnou čárkou, zobrazené na displeji nebo monitoru.)

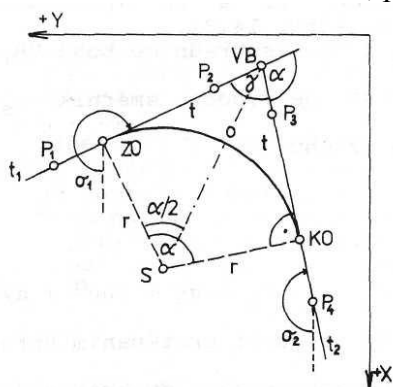
Jsou-li vstupní stejnorodé hodnoty počtem míst velké (např. souřadnice x v S-JTSK mají 9 míst), ale ve zpracovávaném souboru jsou si číselně blízké, je výhodné je při ručním zpracování všechny redukovat o vhodnou celočíselnou konstantu.

V české, resp. středoevropské praxi stavební a průmyslové geodézie se používá setinná (grádová, centesimální) *úhlová míra* ($R = 100 \text{ gon}$, $1 \text{ gon} = 1000 \text{ mgon}$). *Souřadnice* v S-JTSK, uváděné v metrech, mají být zapsány v pořadí y, x .

Poznámka: shoda výsledků v rámci zaokrouhlovacích chyb nebo provedená početní kontrola se potvrzuje za číslem *kolacinací*, hovorově řečeno „odfajfkováním“ ✓.

2.1 PROSTÝ KRUŽNICOVÝ OBLOUK

Tento příklad navazuje na kap. 4.1 a obr. 4.1. Analyticky řeší jeden z nejběžnějších návrhů komunikačního oblouku, používaný i v projektech pozemkových úprav.



Obr. 9.3

Zadání:

Do tečen t_1, t_2 , daných dvojicemi bodů P_1, P_2 a P_3, P_4 , v souřadnicovém systému S-JTSK v metrech, vložte prostý kružnicový oblouk o poloměru $r = 180 \text{ m}$. Staničení bodu P_1 je 15,167 32 km. Podrobné body volte v průběžném staničení v kroku 20 m (obr. 9.3).

P_1 [548 008,68; 1 086 586,49]

P_2 [547 876,89; 1 086 494,92]

P_3 [547 752,07; 1 086 533,58]

P_4 [547 702,54; 1 086 679,40].

Řešení:

a) *Výpočet hlavních prvků*

1) Postupem kap. 9.1 vypočteme souřadnice průsečíku tečen VB [547 786,53; 1 086 432,12].

Přitom byly vypočteny směrníky tečen

$$\sigma_{VB-P1} = 61,3412 \text{ gon},$$

$$\sigma_{VB-P4} = 379,1560 \text{ gon}.$$

2) S pomocí obr. 10.3 vypočteme

$$\gamma = \sigma_{VB-P1} - \sigma_{VB-P4} = 461,3412 - 379,1560 = 82,1852 \text{ gon},$$

$$\alpha = 2R - \gamma = 117,8148 \text{ gon}.$$

Ze vzorce (4.2)

$$t = r \cdot \text{tg}(\alpha/2) = 239,013 \text{ m}.$$

3) Souřadnice dotykových bodů a následně souřadnice středu vypočteme rajonem

$$y_{ZO} = y_{VB} + t \cdot \sin \sigma_{VB-P1} = 547\,982,812 \text{ m},$$

$$x_{ZO} = x_{VB} + t \cdot \cos \sigma_{VB-P1} = 1\,086\,568,504 \text{ m},$$

$$y_{KO} = y_{VB} + t \cdot \sin \sigma_{VB-P4} = 547\,709,664 \text{ m},$$

$$x_{KO} = x_{VB} + t \cdot \cos \sigma_{VB-P4} = 1\,086\,658,436 \text{ m}.$$

Souřadnice středu oblouku S se vypočtou ze souřadnic bodu dotyku ZO (s kontrolou z KO) a zadané délky poloměru $r = 180 \text{ m}$ analogicky také rajonem:

$$\sigma_{ZO-S} = \sigma_{VB-P1} + R = 361,3412 \text{ gon}$$

$$y_S = 547\,880,102,$$

$$x_S = 1\,086\,716,324,$$

$$\sigma_{KO-S} = \sigma_{VB-P4} + R = (479,1560) = 79,1560 \text{ gon},$$

$$y_S = 547\,880,102, \checkmark$$

$$x_S = 1\,086\,716,324. \checkmark$$

Tedy

$$S \quad [547\,880,10; 1\,086\,716,32].$$

$$ZO \quad [547\,982,81; 1\,086\,568,50]$$

$$KO \quad [547\,709,66; 1\,086\,658,44].$$

4) Výpočet délky oblouku

$$o = r \cdot \text{arc} \alpha = 333,113 \text{ m}.$$

(Poznámka: $\text{arc} \alpha = \alpha/\rho$, v setinné míře $\rho = 400/2\pi = 63,6620 \text{ gon}$.)

5) Pravoúhlé (ortogonální) souřadnice pro vytyčení půlícího bodu (vrcholu) oblouku V od tečny

ze vzorce (4.5): $y_V = 71,715 \text{ m}$,

ze vzorce (4.4): $x_V = 143,786 \text{ m}$,

s kontrolou přepočtem na polární souřadnice

$$\text{arc tg} (y_V/x_V) = 29,4536 \text{ gon se má rovnat hodnotě } \alpha/4 = 29,4537 - \text{splněno, } \checkmark$$

Pythagorovou větou z pravoúhlých souřadnic $s_{ZO-V} = 160,678 \text{ m}$.

6) Souřadnice půlícího bodu (vrcholu) oblouku V lze počítat více způsoby.

- Rajonem z bodu VB po symetrále úhlu tečen pomocí hodnoty z

$$\sigma_{VB-V} = \sigma_{VB-S} = \sigma_{VB-P4} + \gamma/2 = 20,2486 \text{ gon},$$

ze vzorce (4.3): $z = 119,211 \text{ m}$,

$$y_V = y_{VB} + z \cdot \sin \sigma_{VB-V} = 547\,823,811 \text{ m},$$

$$x_V = x_{VB} + z \cdot \cos \sigma_{VB-V} = 1\,086\,545,352 \text{ m},$$

- s početní kontrolou z bodu S rajonem, kde $\sigma_{S-V} = \sigma_{VB-S} + 2R = 220,2480 \text{ gon}$ a $r = 180 \text{ m}$

$$y_V = 547\,823,811 \text{ m}, \checkmark$$

$$x_V = 1\,086\,545,352 \text{ m}, \checkmark$$

- z bodu dotyku ZO z polárních souřadnic pro vytyčení V od tečny

$$\sigma_{ZO-V} = \sigma_{ZO-VB} + \alpha/4 = 261,3412 + 29,4537 = 290,7948 \text{ gon}, s_{ZO-V} = 160,678 \text{ m}.$$

$$y_V = 547\,823,811 \text{ m}, \checkmark$$

$$x_V = 1\,086\,545,352 \text{ m}. \checkmark$$

Potom

$$V [547\,823,81; 1\,086\,545,35].$$

b) Výpočet staničení

Ověříme, zda bod P_1 se zadaným staničením leží na tečně před bodem začátku oblouku ZO : $s_{P_1-VB} > t$, konkrétně $270,519 \text{ m} > 239,013 \text{ m}$. Bod ZO tedy leží od P_1 po tečně o $31,506 \text{ m}$ blíže průsečíku tečen VB . Body V a KO jsou pak vzdáleny vždy o polovinu délky oblouku:

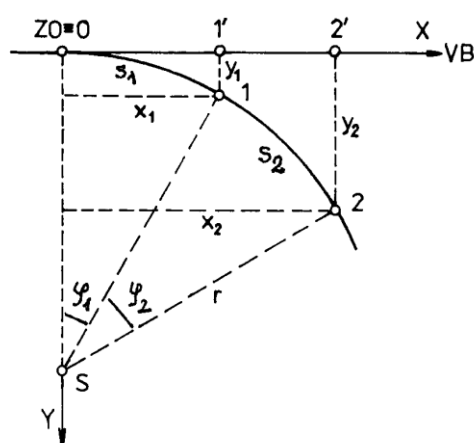
$$P_1 \dots\dots 15,167\,32 \text{ km}$$

$$ZO \quad 15,198\,83 \text{ km}$$

$$V \quad 15,365\,38 \text{ km}$$

$$KO \quad 15,531\,94 \text{ km}.$$

c) Výpočet podrobných bodů



Obr. 9.4

Při vytyčování kružnicových oblouků se volí podrobné body v kroku 5m až 20 m po křivce. Vytyčování se v současnosti provádí polárně totálními stanicemi obvykle od tečny z bodu dotyku nebo u plochých oblouků z průsečíku tečen. Vzorce pro přímý výpočet polárních souřadnic (i souřadnic pravoúhlých) jsou uvedeny např. v [1] a velmi podrobně v [10]. Na tomto místě budou polární souřadnice vypočteny ze souřadnic pravoúhlých, v nichž je dnes samozřejmě oblouk projektován (obr. 9.4). Převod místních pravoúhlých souřadnic pro vytyčení od tečny do referenčního systému (zpravidla S-JTSK) je záležitostí transformace.

Z rozdílu staničení (kilometráže) se vypočtou délky úseků oblouku s_i . Při běžně používaném průběžném staničení je tedy první (resp. poslední) úsek za (resp. před) hlavním bodem oblouku, tj. u prostých oblouků ZO , V , KO , obecně kratší nežli zvolený okrouhlý krok. (Součet úseků z obou stran hlavního bodu se musí rovnat právě délce kroku.) Pro redukci délky úseku oblouku do tětiny se používá následující přibližný vzorec, který platí jen pro krátké úseky.

$$s_i \cong s_i - \frac{s_i^3}{24r^2}. \quad (9.1)$$

Z hodnoty s_i a poloměru r se vypočte středový úhel φ

$$\varphi_i = \frac{s_i}{r} \rho. \quad (9.2)$$

Pro výpočet souřadnic se středové úhly postupně sčítají. Ve vzorcích je tento součet označen φ_i' . (Pro bod 2 v obr. 10.4 je $\varphi_2' = \varphi_1 + \varphi_2$ atd.)

Potom pro pravoúhlé souřadnice pro vytyčování od tečny z bodu dotyku platí

$$y_i = r \cdot (1 - \cos \varphi_i')$$

$$x_i = r \cdot \sin \varphi_i'. \quad (9.3)$$

Pokud označíme úhel $\alpha(VB-ZO-i) = \delta$, pak pro polární vytyčení platí

$$\delta_i = \frac{\varphi_i'}{2} = \arctg \frac{y_i}{x_i}, \quad (9.4)$$

$$d_i = \sqrt{(y_i - y_{zo})^2 + (x_i - x_{zo})^2}.$$

| Bod | Staničení (km) | s _i (m) | φ _i (gon) | φ _i ' (gon) | δ _i (gon) | d _i (m) | y _i (m) | x _i (m) |
|-----|-------------------|-----------------------|--|---------------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| ZO | 15,198 83 | --- | --- | --- | --- | --- | 0,000 | 0,000 |
| I | 15,200 00 | 1,17 | 0,4138 | 0,4138 | 0,2069 | 1,170 | 0,004 | 1,170 |
| 2 | 15,220 00 | 20,00 | 7,0736 | 7,4874 | 3,7437 | 21,576 | 1,244 | 21,121 |
| ... | | 20,00 | 7,0736 | | | | | |
| 9 | 15,360 00 | 20,00 | 7,0736 | 57,0026 | 28,5013 | 155,840 | 67,461 | 140,482 |
| V | 15,365 38 | 5,38 | 1,9028 | 58,9074* | 29,4357 | 160,678 | 71,715 | 143,786 |
| 10 | 15,380 00 | 14,62 | <i>obdobně pokračovat, nebo výpočet z KO</i> | | | | | |

Poznámka *: při postupném výpočtu dostaneme $\varphi_V' = 58,9054$ gon. Závazná je ovšem hodnota z výpočtu hlavních prvků, uvedená i v tabulce. Rozdíl +2,0 mgon vyvolá příčnou chybu 5 mm, které je běžně zanedbatelná. U přesných prací, např. při vytyčování železnic, by byla volena délka úseků kratší, úseky by bylo vhodné počítat v mm a případný rozdíl (včetně nepřesnosti vytyčení) by byl na bodech vyrovnán úměrně vzdálenosti od stanoviště ZO.

LITERATURA

- HÁNEK, P. a kol: Stavební geodézie. (Skripta ČVUT – FSv.) Praha, *Česká technika*, 2007.
- ŠVEC, M., HÁNEK, P.: Stavební geodézie 10. 3. vydání. (Skripta ČVUT - FSv.) Praha, *Česká technika* 2006.
- BÖHM, J., RADOUCH, V., HAMPACHER, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Praha, *GKP* 1990.
- ČSN 73 0420 – 1, 2 Přesnost vytyčování staveb – Část 1: Základní požadavky, Část 2: Vytyčovací odchylky. Praha, *ČNI* 2002.
- DUŠEK, R., VLASÁK, J.: Geodézie 50. Příklady a návody na cvičení. (Skripta ČVUT – FSv.) Praha, *Vydavatelství ČVUT* 1999.
- HÁNEK, P., KOZA, P.: Geodézie pro střední průmyslové školy stavební. 3. rozšířené a přepracované vydání. Praha, *Sobotáles* 2004, 296 s.
- KRUMPHANZL, V.: Inženýrská geodézie I. Praha, *SNTL* 1966.
- <http://www.cuzk.cz> (5/2008)
- ČSN 73 6109 Projektování polních cest. Praha, *ČNI* 2004.