Teorie chyb

Doc. Ing. Pavel Hánek, CSc.
ČVUT v Praze, fakulta stavební, katedra speciální geodézie
2016

Tento soubor je pomocným materiálem předmětu 154YIGD.
Bez výkladu přednášejícího není úplný.

Chyby měření a jejich dělení

Omyly a hrubé chyby

- „jedno měření = žádné měření“
- lze je ze souboru vyloučit nezávislým opakováním měření.

Nevyhnutelné chyby

- **systematické**
- **náhodné** (nahodilé).

Systematické chyby (*c*)

- systematicky (soustavně) ovlivňují výsledky opakovaných měření
- lze nalézt (?) závislost na určité příčině

konstantní vs. proměnlivé.

Potlačení

- kalibrací a rektifikací přístrojů
- metodikou měření, včetně nezávislých kontrol.

Jednoduchá kritéria přítomnosti systematických chyb

- znaménkový test: |počet znamének plus mínus počet zn. mínus| $< \sqrt{n}$
- odhad velikosti: $c = [o]/n < (m/\sqrt{n})$

Náhodné chyby a zákon přenášení chyb

- **Náhodné chyby (δ)**
  - jednotlivě nemají zákonitosti
  - ve větších souborech mají statistické zákonitosti

- **Skutečná (pravá) chyba měření ε**
  - $\varepsilon = X - l$

    $\varepsilon_i = \delta_i + c_i$

- **Zákon přenášení skutečných chyb**

  Explicitně: $u = f(x, y, z)$

  Ve skutečnosti mají nezávislé x, y, z skutečné chyby εx, εy, εz

  Taylorův rozvoj: $u + \varepsilon u = f(x+\varepsilon x, y+\varepsilon y, z+\varepsilon z) - f(x, y, z)$

  $\varepsilon u = (\partial f/\partial x)\varepsilon x + (\partial f/\partial y)\varepsilon y + (\partial f/\partial z)\varepsilon z$

  úpravou $\varepsilon u = a\varepsilon x + b\varepsilon y + c\varepsilon z$

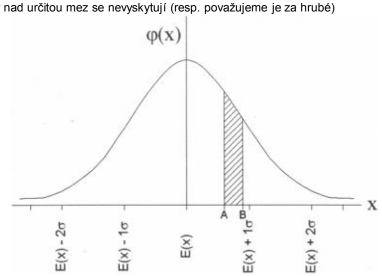
  Věta o střední hodnotě $m^2 = \sigma^2 = E(\varepsilon^2)$

  potom $\mathbf{m_u^2 = \sigma_u^2 = (a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + c^2 \sigma_z^2)}$

Gaussova křivka

Vlastnosti náhodných chyb:

- pravděpodobnost vzniku kladné či záporné odchylky je stejná
- malé chyby jsou pravděpodobnější (četnější) než velké
- chyby nad určitou mez se nevyskytují (resp. považujeme je za hrubé)



Graf frekvenční křivky normálního rozdělení pro $N(E(x),\sigma^2)$

Hodnoty pravděpodobnosti P pro interval mezi body A a B

A	B	P [%]
E(x)	E(x) + σ	34,1
E(x) - σ	E(x) + σ	**68,2**
E(x)	E(x) + 2σ	47,7
E(x) - 2σ	E(x) + 2σ	**95,4**
E(x)	E(x) + 3σ	49,9
E(x) - 3σ	E(x) + 3σ	**99,7**
E(x) - ∞	E(x) + ∞	100,0

Charakteristiky přesnosti

- Průměrná chyba $s = (\Sigma\ |\varepsilon|)\ /\ n$
- Pravděpodobná chyba $r = \varepsilon_{n/2}$
- **Směrodatná odchylka σ**, ve starší terminologii střední (kvadratická) chyba **m**
- Platí: $r : s : m = 0{,}48 : 0{,}56 : 0{,}71$

Metoda nejmenších čtverců

- 1809 K. F. Gauss
- $v = x - l$
- $\Sigma vv = [vv] = min.$

- Minimum: 1. derivace = 0, 2. derivace kladná
  $[vv]' = 2(v_1 + v_2 + \dots v_n) = 0$, z toho $[v] = 0$
  $[v]' = [vv]'' = (1 + 1 + \dots 1) = n > 0$

- Dosazením $v_i = x - \mathbf{l}_i$ do vzorce $(v_1 + v_2 + \dots v_n) = 0$ dostaneme
  $x = (\Sigma l):n$ (vzorec aritmetického průměru)

Směrodatná odchylka (střední chyba)

- Charakteristika přesnosti měření:
  - Základní směrodatná odchylka:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}}$$

  - Výběrová směrodatná odchylka:

$$v_i = \bar{l} - l_i \qquad s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

Mezní odchylka

- Určuje hranici, jakou “maximální“ odchylku měření může mít

$$\delta_M = u_p \cdot \sigma$$

- Koeficient spolehlivosti $\boldsymbol{u_p}$ (normovaná hodnota normálního rozdělení)
  - Volí se podle významu prací a možnosti vyloučení systematických chyb
  - $u_p = 2$ ~ 95% pravděpodobnost, že náhodná chyba nepřekročí δ_M
  - $u_p = 2,5$ ~ 99% pravděpodobnost, že náhodná chyba nepřekročí δ_M
  - $u_p = 3$ ~ 99,7% pravděpodobnost, že náhodná chyba nepřekročí δ_M