



# Nelineární analýza železobetonových konstrukcí: Úvod do problematiky

Petr Bílý

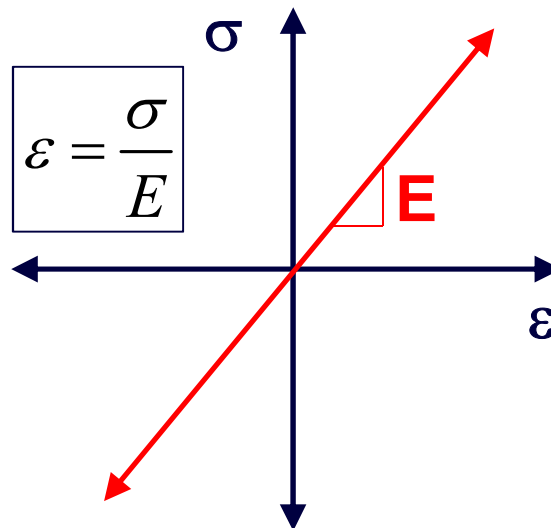
kancelář B731

e-mail: [petr.bily@fsv.cvut.cz](mailto:petr.bily@fsv.cvut.cz)

web: [people.fsv.cvut.cz/www/bilypet1](http://people.fsv.cvut.cz/www/bilypet1)

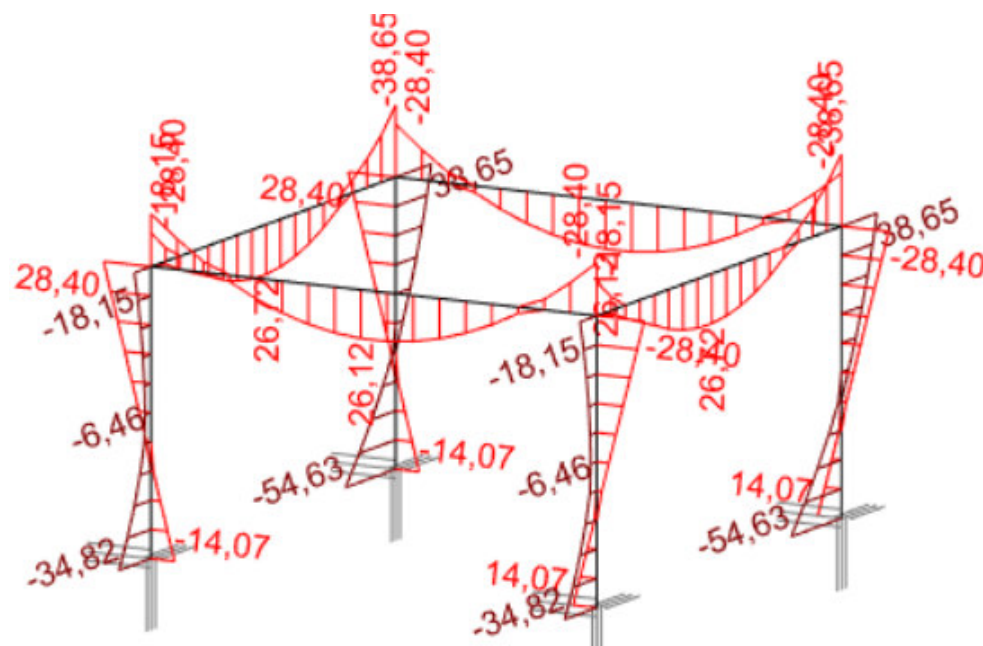
# Lineárně pružná analýza

- Klasický přístup pro globální analýzy konstrukcí
- není definována mez pevnosti materiálu
- Tuhost ani geometrie kce nezávisí na úrovni zatížení a na čase
- Stanovení vnitřních sil => návrh výztuže a posouzení konstrukce (ručně, programem)



# Lineárně pružná analýza

- + Málo požadovaných vstupů
- + Jednoduché zadání geometrie (pruty, desky)
- + Méně prostoru pro chyby a desinterpretace
- + Relativně rychlý výpočet
- Omezené možnosti



# Lineárně pružná analýza

- +/- Konzervativní návrh na MSÚ

Most reinforced concrete structures are designed for moments, shears, and axial forces found by elastic theory with methods such as those described in Sections 12.1 through 12.8. On the other hand, the actual proportioning of members is done by strength methods, with the recognition that inelastic section and member response would result upon overloading. Factored loads are used in the elastic analysis to find moments in a continuous beam, for example, after which the critical beam sections are designed with the knowledge that the steel would be well into the yield range and the concrete stress distribution very nonlinear before final collapse. Clearly this is an inconsistent approach to the total analysis-design process, although it can be shown to be both safe and conservative. A beam or frame so analyzed and designed will not fail at a load lower than the value calculated in this way.<sup>†</sup>

**Nilson et al.:**  
**Design of Concrete**  
**Structures, 14th ed.**  
**McGraw Hill, 2010**

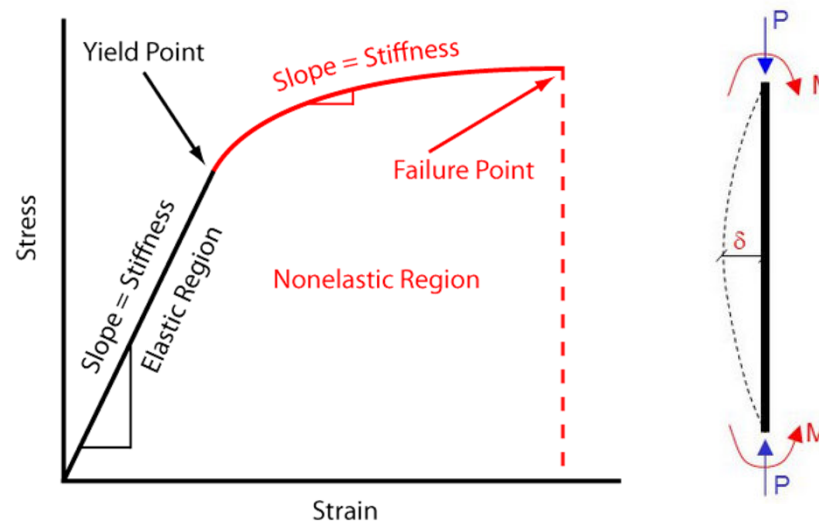
**Lower bound theorem:** If, for a given external load, it is possible to find a distribution of moments that satisfies equilibrium requirements, with the moment not exceeding the yield moment at any location, and if the boundary conditions are satisfied, then the given load is a lower bound of the true carrying capacity.

**Upper bound theorem:** If, for a small increment of displacement, the internal work done by the slab, assuming that the moment at every plastic hinge is equal to the yield moment and that boundary conditions are satisfied, is equal to the external work done by the given load for that same small increment of displacement, then that load is an upper bound of the true carrying capacity.

If the lower bound conditions are satisfied, the slab can certainly carry the given load, although a higher load may be carried if internal redistributions of moment occur. If the upper bound conditions are satisfied, a load greater than the given load will certainly cause failure, although a lower load may produce collapse if the selected failure mechanism is incorrect in any sense.

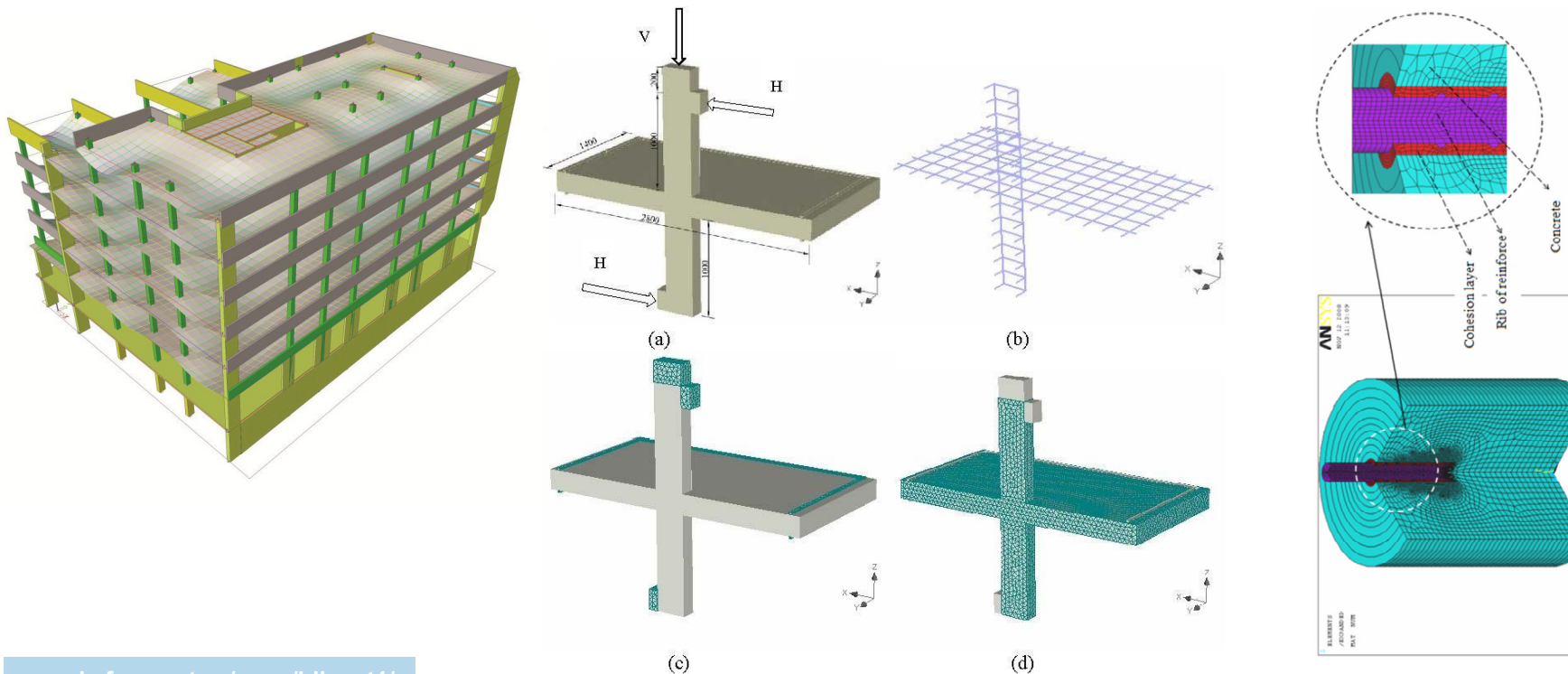
# Nelineární analýza

- Materiálová nelinearita – omezená platnost Hookeova zákona, plastické přetváření, trvalé deformace
- Geometrická nelinearita – velké posuvy a deformace => změna geometrie kce v průběhu zatěžování => dodatečná namáhání



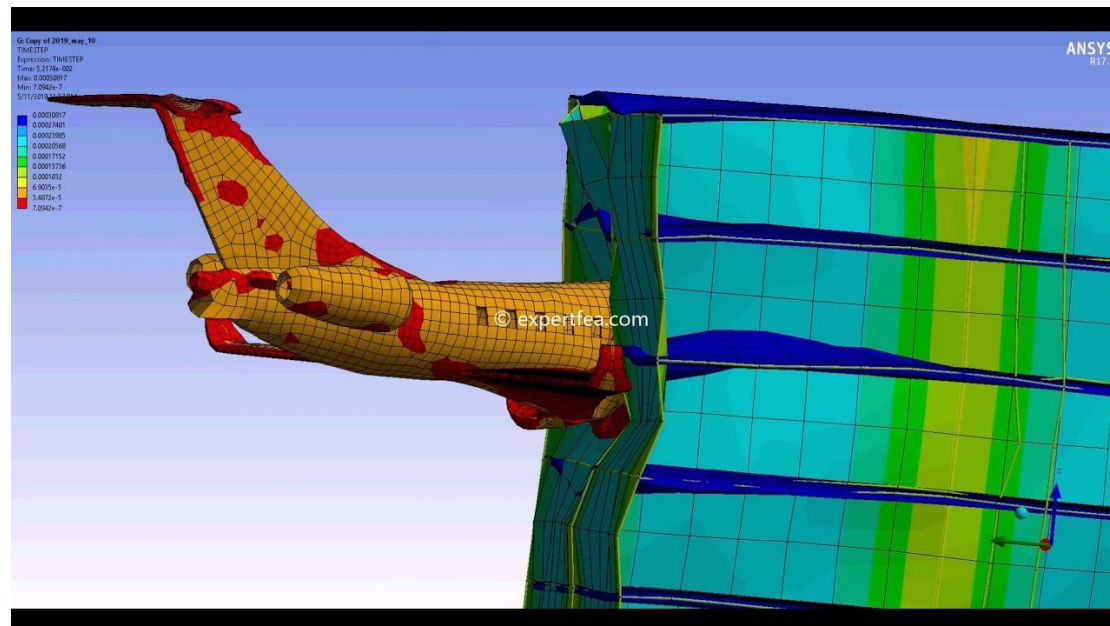
# Nelineární analýza

- Snaha o vystižení **skutečného** chování
  - Celé konstrukce (méně časté)
  - Klíčových prvků a detailů
  - Často více úrovní modelu s různou podrobností



# Nelineární analýza

- Návrh konstrukcí
- Objasňování příčin poruch
- Virtuální testování konstrukcí
- Simulace experimentů

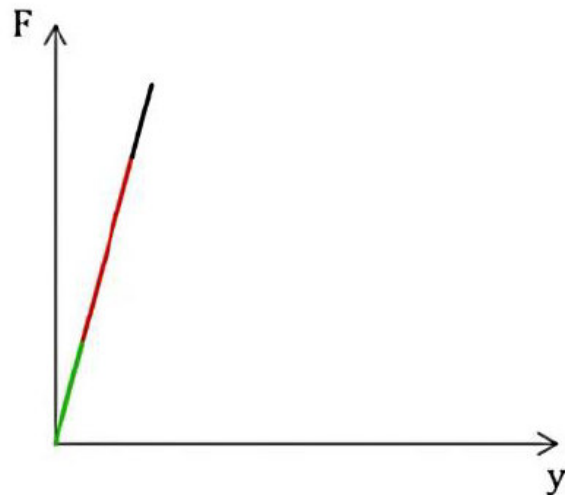




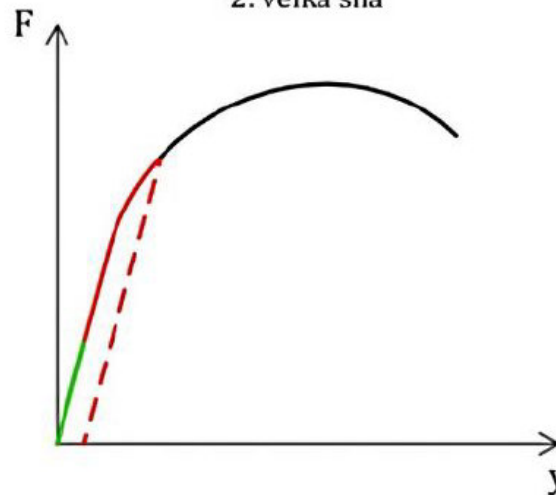
# Nelineární analýza

- Náročná definice vstupů – materiál, geometrie, síť, okrajové podmínky...
- Vyhodnocení vyžaduje znalosti, zkušenosti a cit
- Při nelineárním chování neplatí princip superpozice

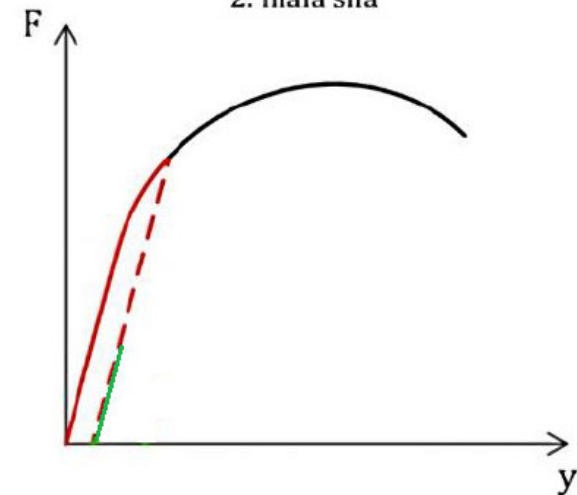
1) Lineárně pružná analýza  
Na pořadí nezáleží



2a) Nelineární analýza  
1. malá síla  
2. velká síla



2b) Nelineární analýza  
1. velká síla  
2. malá síla



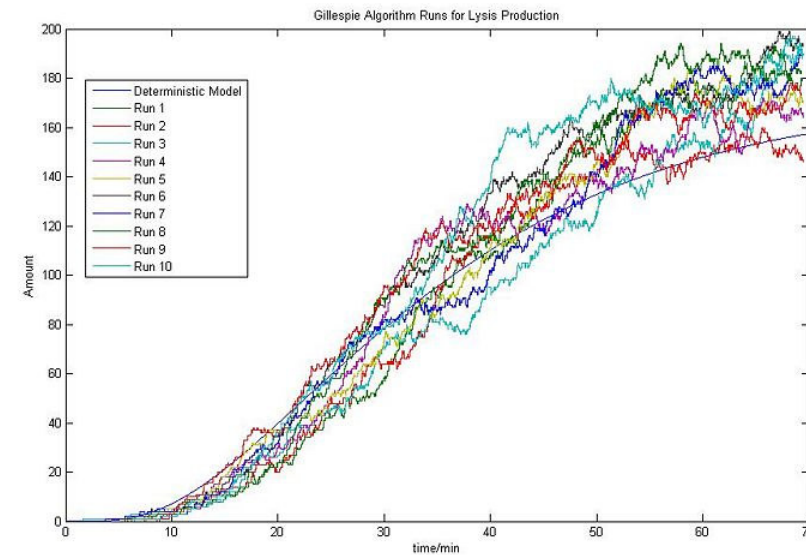
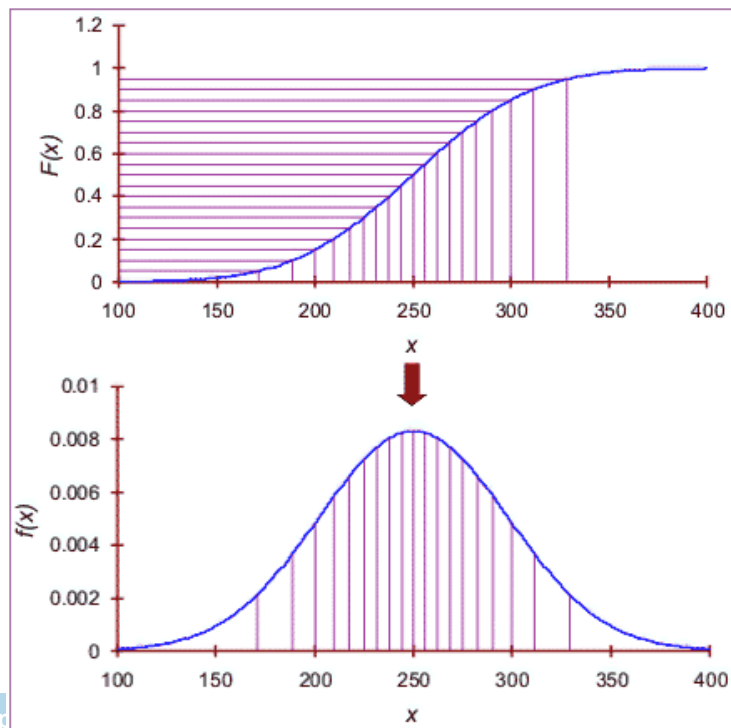
— Malá síla

— Velká síla



# Terminologie

- Deterministický model – vstupní hodnoty jsou pevně dány
- Stochastický model – zohledňuje nejistoty vstupních hodnot, pracuje s pravděpodobností



# Terminologie

- Diskrétní model – zkoumá jeden konkrétní okamžik
- Kontinuální model – zkoumá vývoj v čase
- Verifikace – je model bez chyb? Ověření jiným výpočtem, jiným modelem. *Počítám správně?*
- Validace – odpovídá model realitě? Nezávislé ověření, nejčastěji experimentem. *Počítám to správně?*

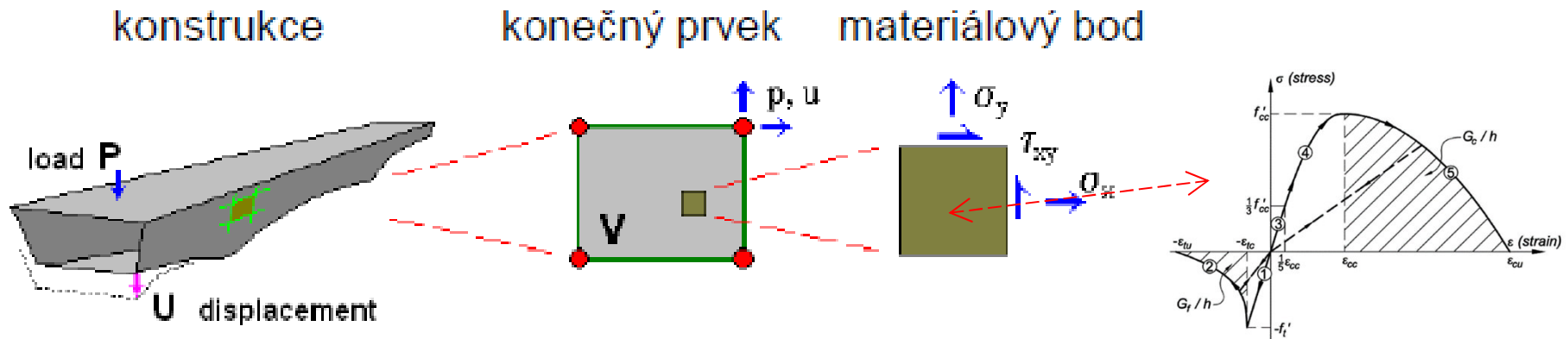
# Programy

- Založeny na metodě konečných prvků
- ANSYS, ABAQUS – obecné, nejnáročnější
- ATENA – speciálně vyvinuto pro betonové konstrukce
- Idea Statica – Metoda polí napětí (Compatible Stress Field Method) – jednodušší, postup dle norem X nelze modelovat vše





# Princip výpočtu MKP



- Geometrické rovnice:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{N}$$

**B** – geometrická matice  
**N** – matice interpolačních funkcí

# Princip výpočtu MKP

- Konstitutivní vztahy:  $\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}$  – matice materiálové tuhosti

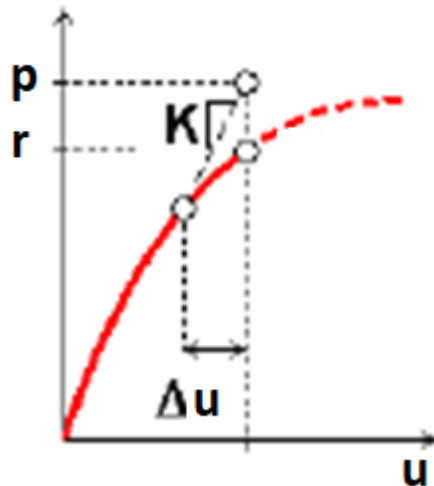
- Matice tuhosti konstrukce:

$$\mathbf{K} = \int_{\bar{\Omega}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\bar{\Omega}$$

$\bar{\Omega}$  = „konstrukce“

# Princip výpočtu MKP

- Podmínka rovnováhy:



$$\mathbf{K} \cdot \Delta u = p - r$$

$\Delta u$  – vektor přírůstků deformace v důsledku přírůstků zatížení v daném zatěžovacím kroku  
 $p$  – vektor uzlových zatížení  
 $r$  – vektor vnitřních sil

- Změny tuhosti, geometrie => zatěžujeme po krocích (konvergence)



# Princip výpočtu MKP

- Pro stanovení únosnosti konstrukce nelineární analýzou se zavádí **globální** součinitel bezpečnosti

$$\gamma_R = \frac{R_m}{R_d}$$

- Obecně:

$$\gamma_R = e^{\alpha_R \beta V_R}$$

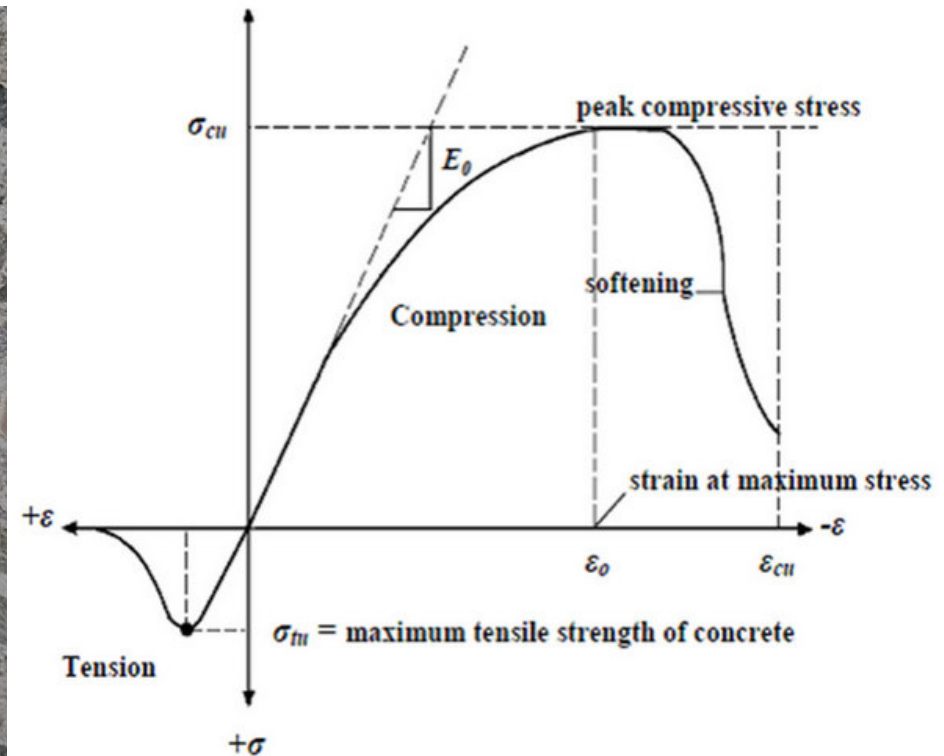
- ČSN EN 1992-2 (pro  $f_{cm}^* = 0,85f_{ck}$ ,  $f_{ym} = 1,1f_{yk}$ ):

$$\gamma_R = 1,27$$

- Aplikuje se na výsledky, ne na vstupy

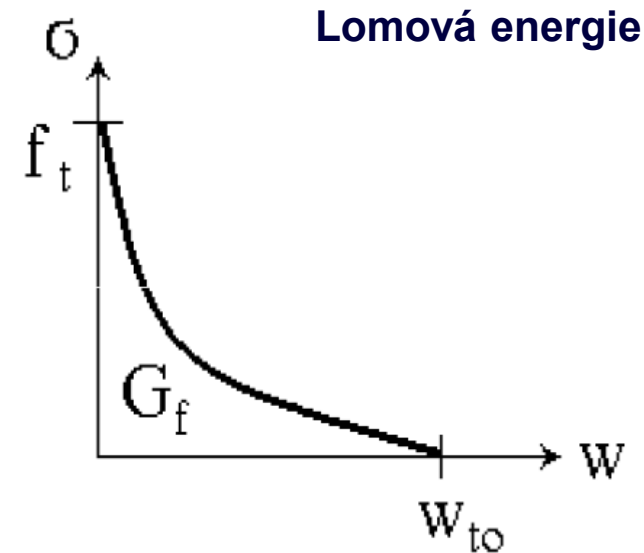
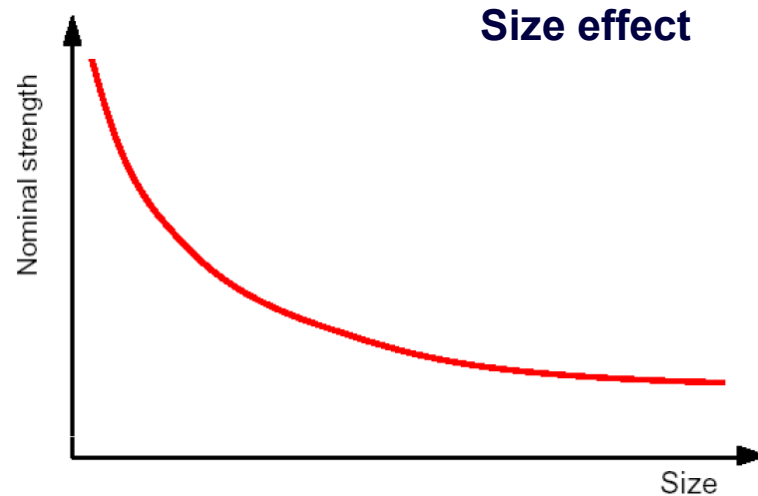
# Modely pro beton

- Heterogenní materiál: cementový tmel, kamenivo, póry, voda...
- Kvazikřehký materiál



# Modely pro beton

- V tahu – vznik trhlin, pokritické působení
- V tlaku – vliv sevření, změna objemu
- Vliv velikosti vzorku (size effect)



- Modely pro výztuž, soudržnost betonu a výztuže, ocelové kční prvky, kontaktní plochy...



# Nelineární analýza železobetonových konstrukcí: Příklady analýz

# Zatěžovací zkouška Omega nosníku

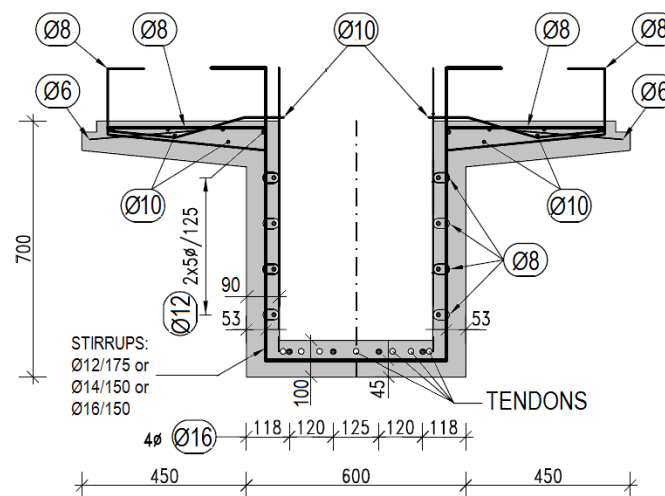
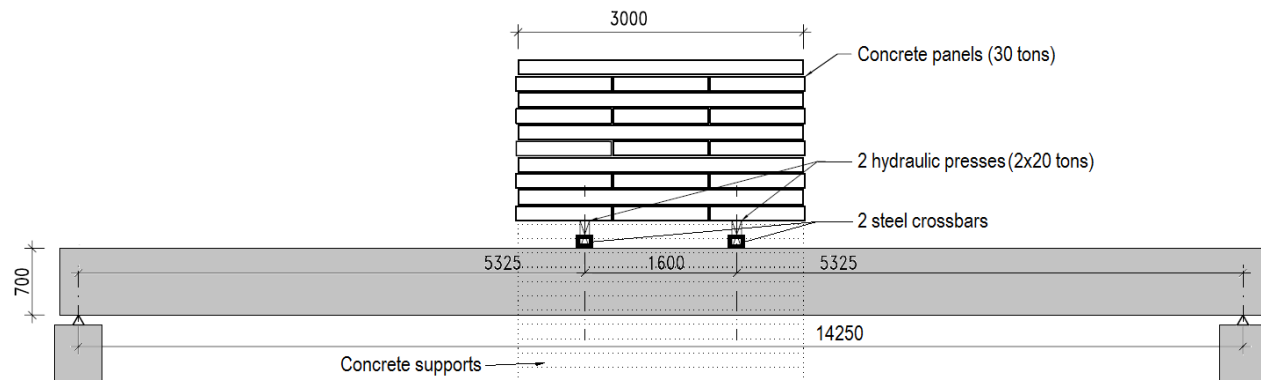
- Ztracené bednění trámových mostů (Eurovia CS)
- HPC – vyšší únosnost, trvanlivost



Zdroj: Ing. Jedlinský, Eurovia CS

# Zatěžovací zkouška Omega nosníku

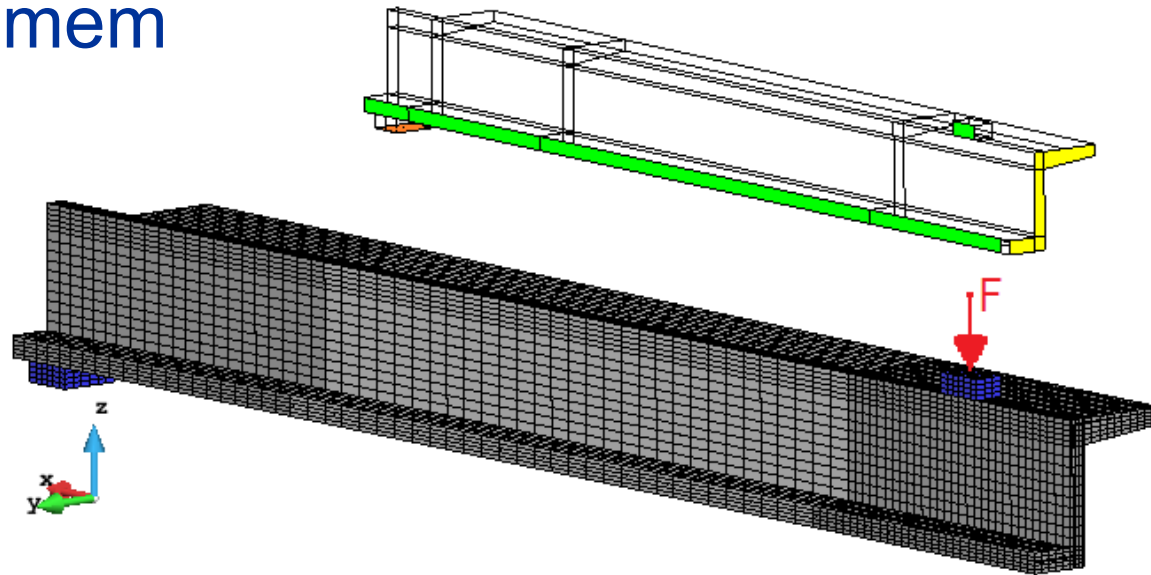
- Zatěžovací zkouška nešla do porušení
- Odhad skutečné únosnosti, tvarová stabilita





# Zatěžovací zkouška Omega nosníku

- Symetrická  $\frac{1}{4}$ , optimalizace sítě – úspora výpočetního času
- Předpětí modelováno jako počáteční zkrácení kabelů – stabilita výpočtu
- Modul Creep – ztráty kromě relaxace počítány programem

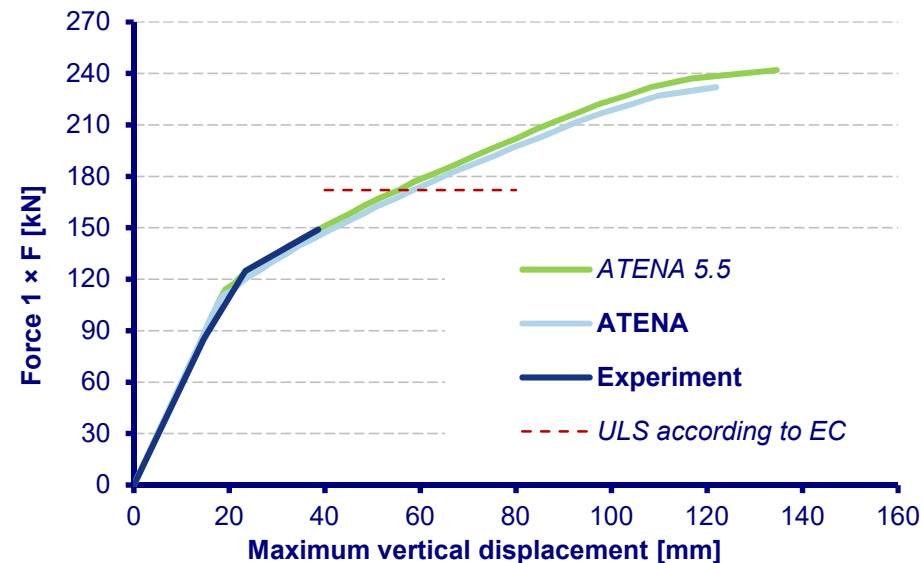




# Zatěžovací zkouška Omega nosníku

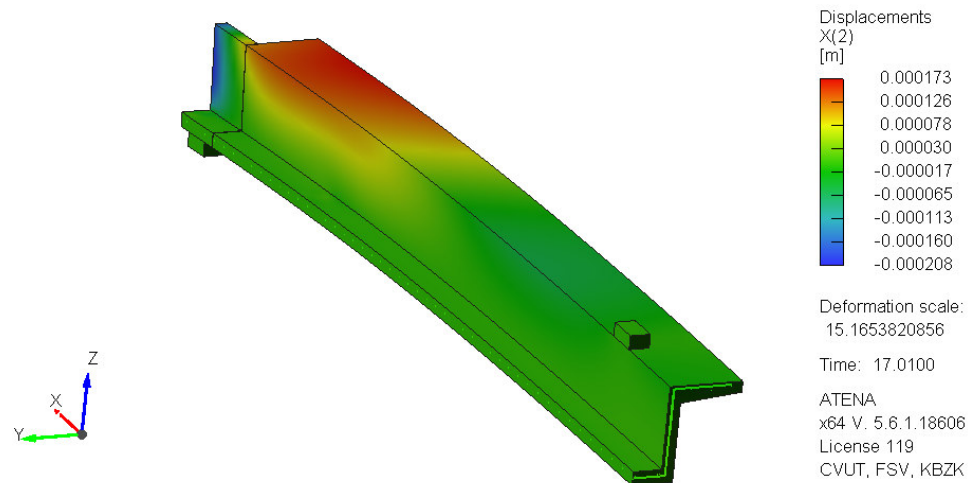
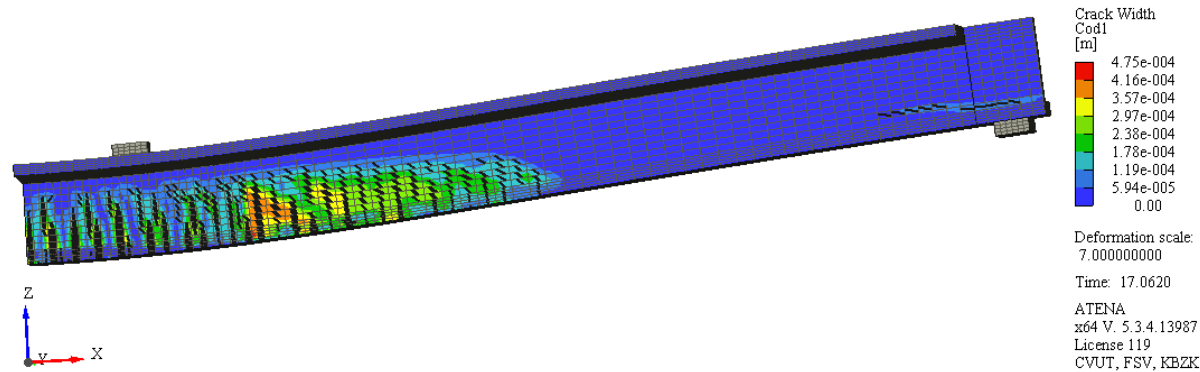
- Zatěžování po krocích

Step no.	Load step	Time [days]	New applied loads	Number of increments [-]	Total force in the end of the step [kN]
0	Production, curing	0.0 – 2.1	-	-	-
1	Prestressing	2.1 – 2.2	Self-weight, prestress	5	-
2	Aging, losses in prestress	2.2 – 17.0	Creep, shrinkage, losses in ps.	5	-
3	In-situ concreting	17.0 – 17.01	$0.5 \times 85$ kN	5	$0.5 \times 85$
4	Decompression	17.01 – 17.02	$0.5 \times 4$ kN	5	$0.5 \times 89$
5	Tensile strength	17.02 – 17.03	$0.5 \times 36$ kN	10	$0.5 \times 125$
6	End of the test	17.03 – 17.04	$0.5 \times 24$ kN	5	$0.5 \times 149$
7	Theoretical capacity	17.04 – 17.05	$0.5 \times 23$ kN	5	$0.5 \times 172$
8	ULS	17.05 – 17.065	$0.5 \times 75$ kN	15	$0.5 \times 247$



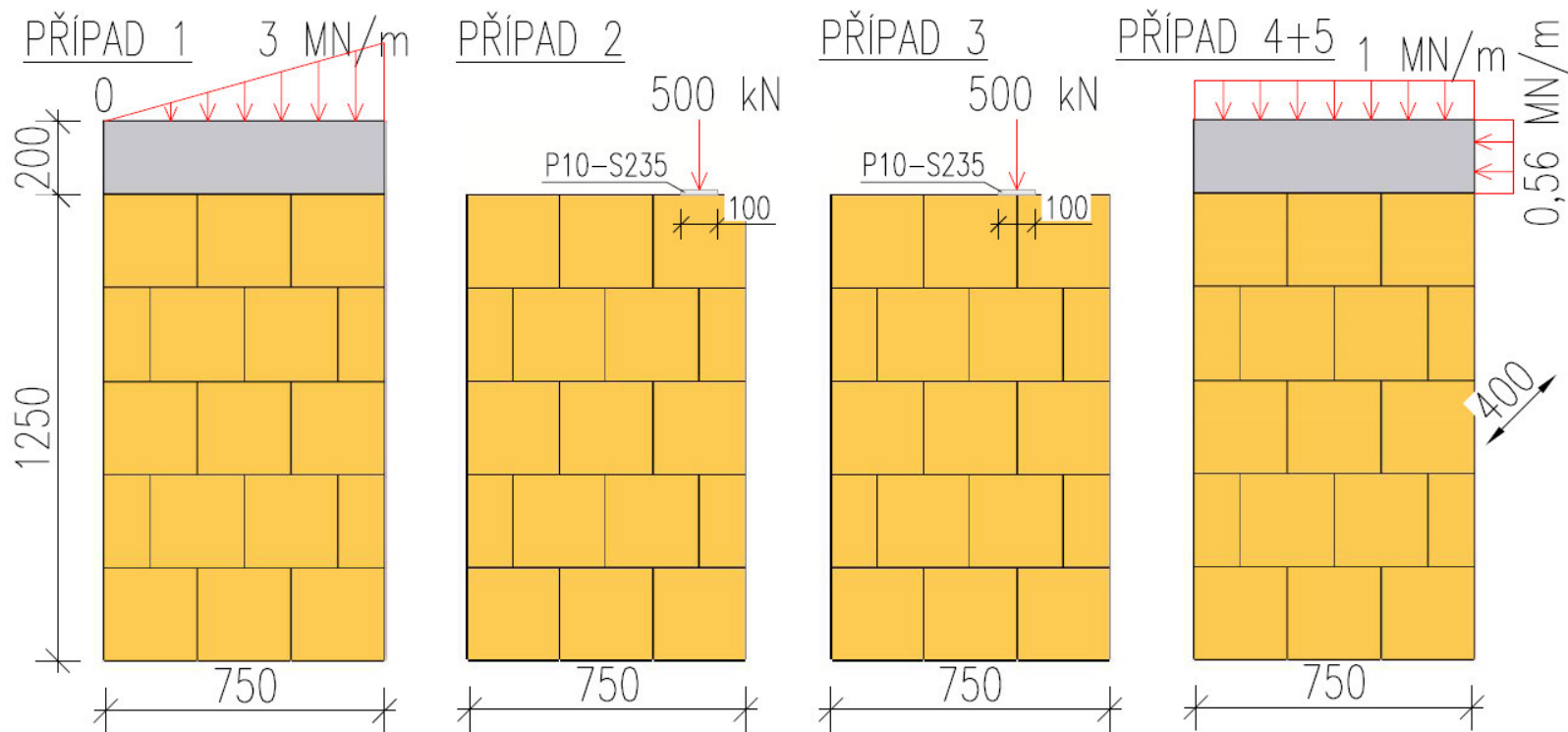
# Zatěžovací zkouška Omega nosníku

- Materiálové nelineární => trhliny
- Geometricky nelineární => příčná tvarová stabilita



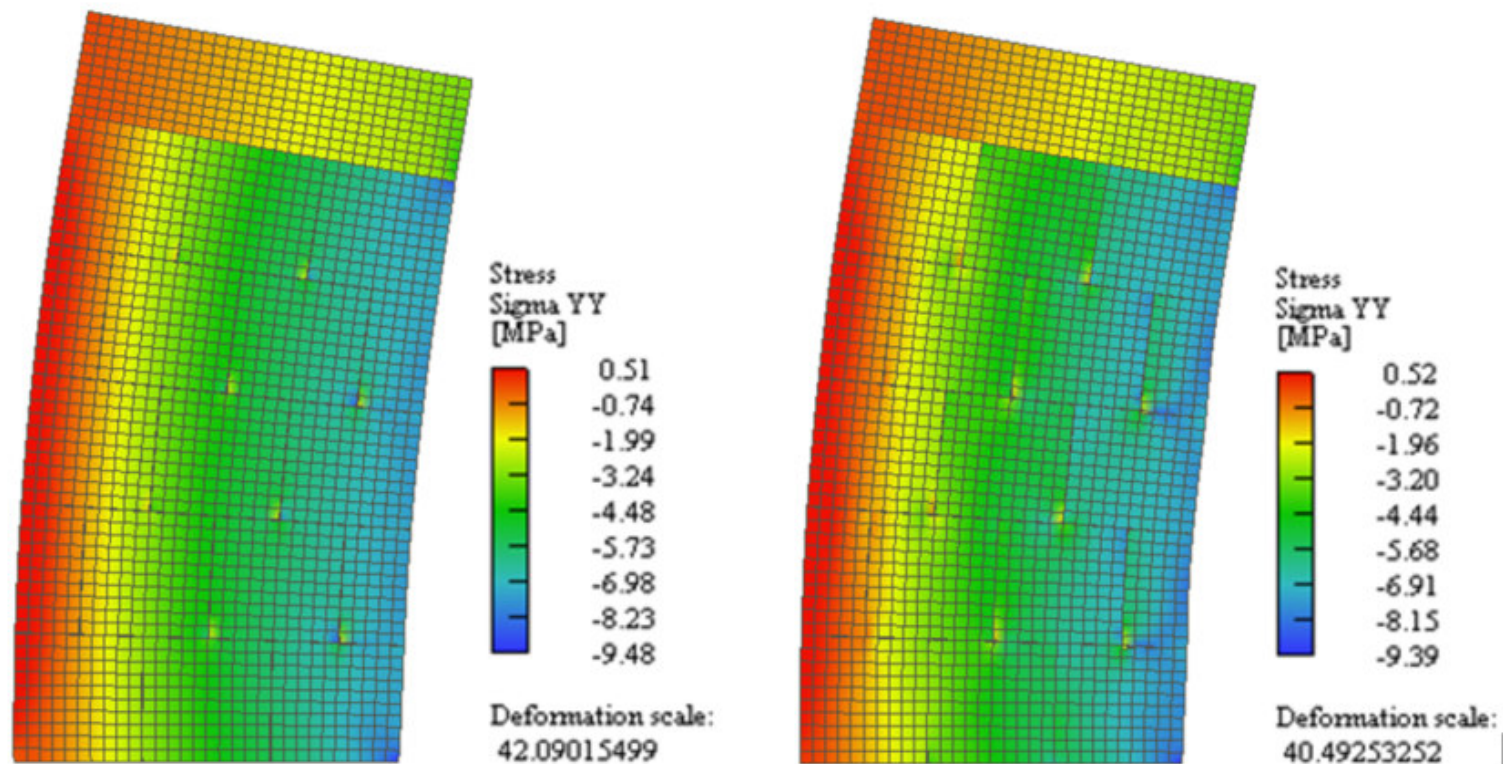
# Maltování styčných spár zdiva

- EC6: Maltování zohledněno ve výpočtu smykové únosnosti, ne však tlakové únosnosti



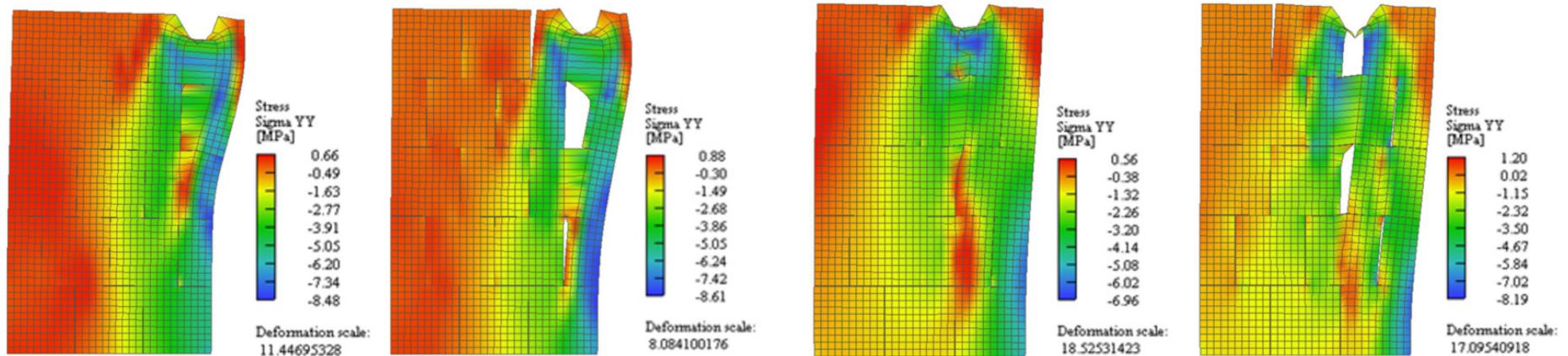
# Maltování styčných spár zdiva

- Plošné tlakové zatížení (1): zanedbatelný vliv



# Maltování styčných spár zdiva

- Bodové tlakové zatížení (2,3): Nepříznivé, neumisťovat nad spáru, roznést



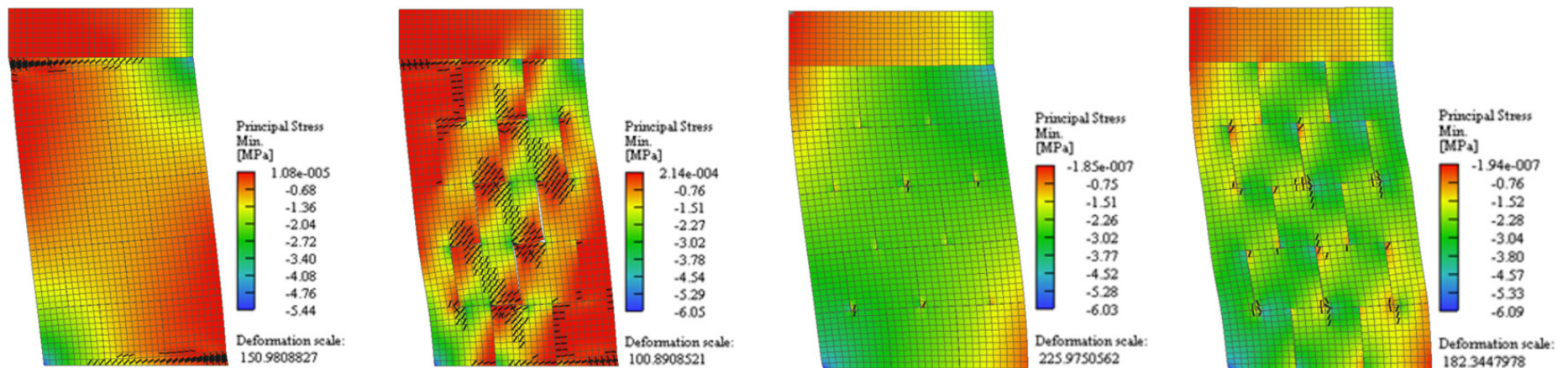
**Tab. 1** Maximální rozevření styčných spár mezi zdíci prvky ( $s_{max}$ ) a největší šířka trhlin ve zdících prvcích ( $w_{max}$ ).

Případ	Maltované styčné spáry		Nemaltované styčné spáry	
	$s_{max}$ [mm]	$w_{max}$ [mm]	$s_{max}$ [mm]	$w_{max}$ [mm]
1	0	0	0	0
2	2,0	0	5,3	0
3	0	5,1	5,9	8,7



# Maltování styčných spár zdiva

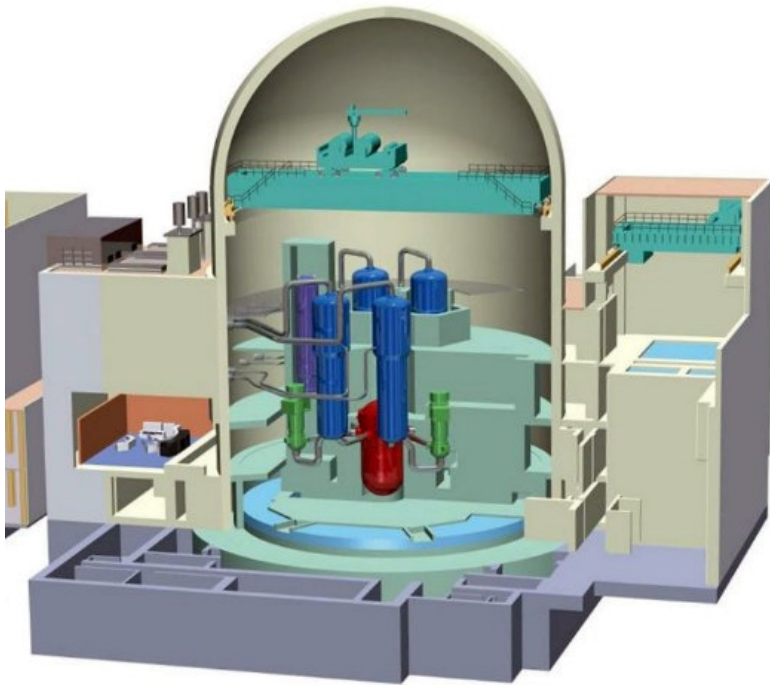
- Vodorovné zatížení (4,5): Klíčové je svislé přetížení, které vliv maltování potlačuje



- Závěr: U vhodně zatížených prvků je normový přístup dostačující

# Analýza vystýlky kontejnmentu

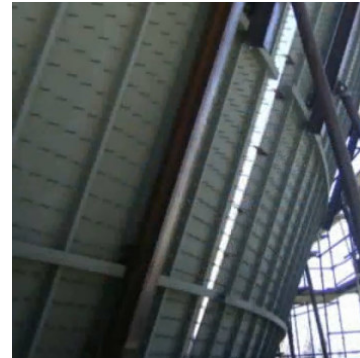
- Kontejnment = hermetická tlaková obálka reaktoru
- Obvykle cca 1 m PŘB + cca 8 mm ocelová vystýlka





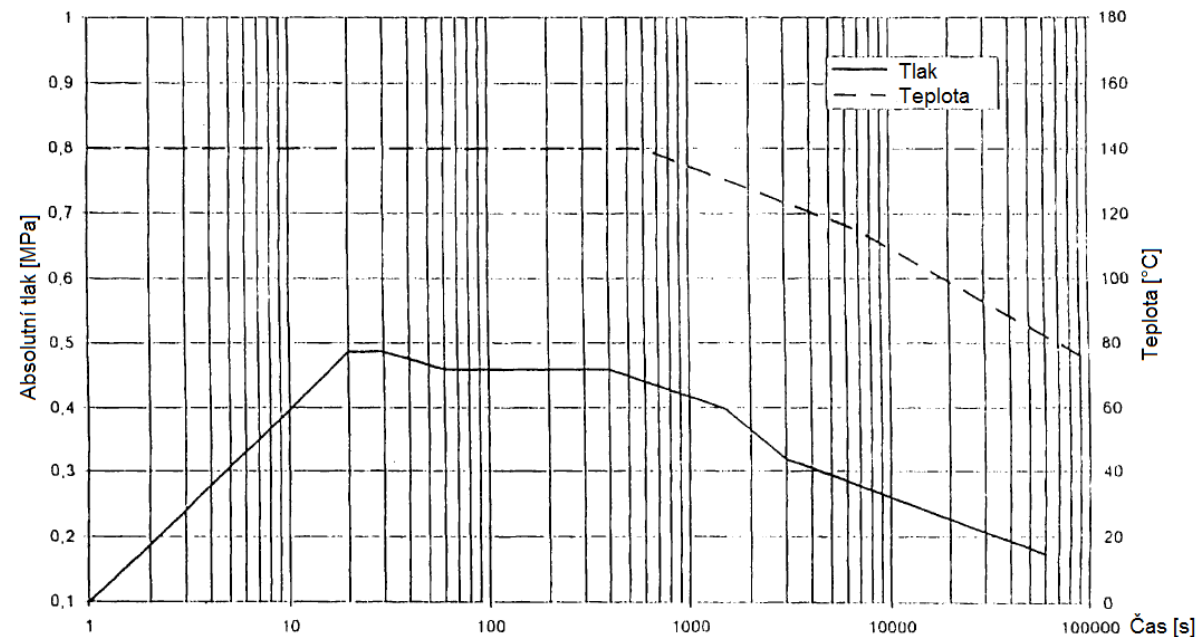
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Vystýlka zajišťuje těsnost, nepočítá se s její únosností
- Kotvení pomocí trnů, profilů či kombinace



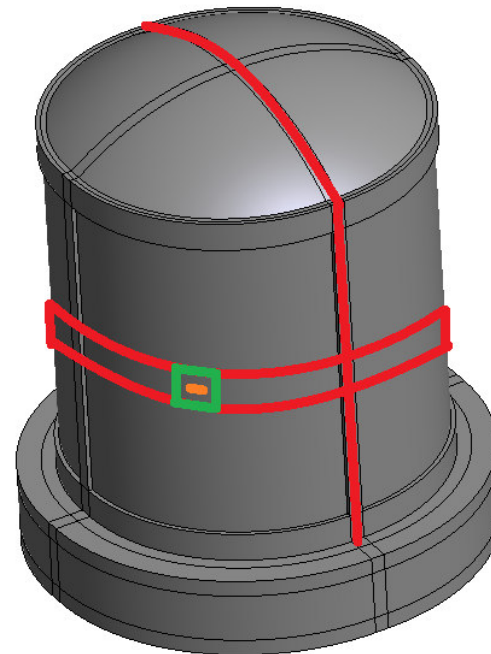
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Jaký je přínos vystýlky ke skutečné únosnosti?
- Jak vystýlku kotvit k betonu?
- Rozhodující zatížení: Havárie se ztrátou chladiva (LOCA)
- Obvykle přetlak cca 0,5 MPa, teplota cca 150 °C



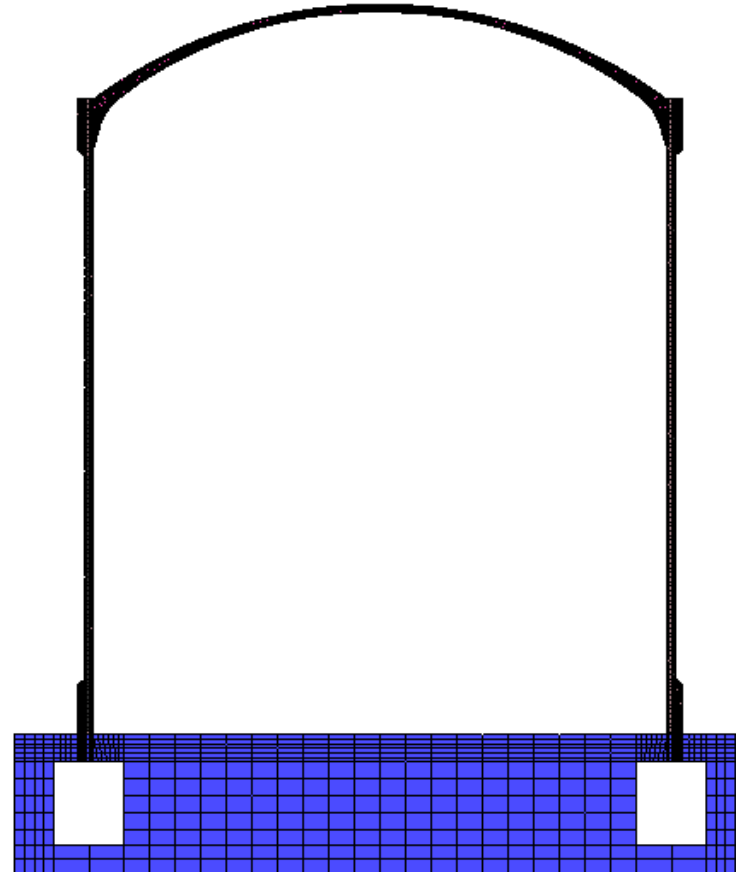
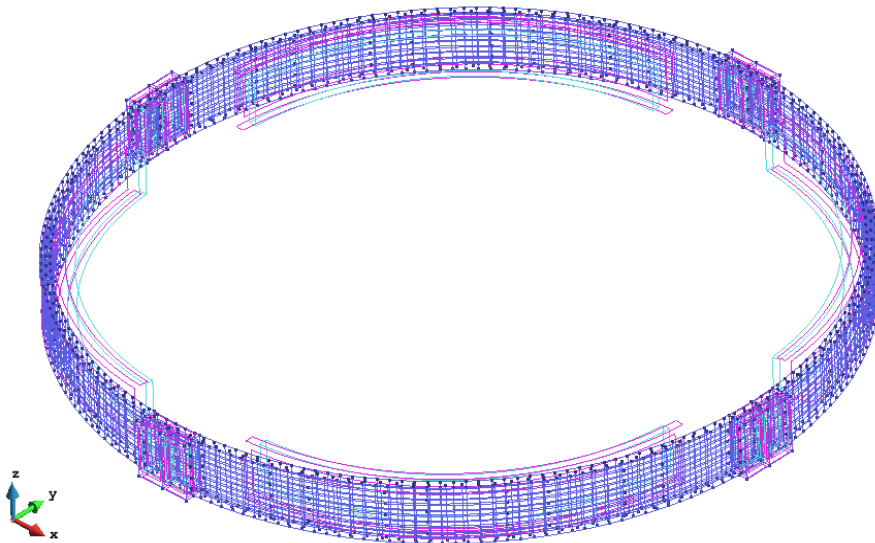
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Víceúrovňová analýza
- Účinky zatížení na kontejnment – globální modely
  - Úroveň 0 (celá kce)
  - **Úroveň 1 (řezy)**
- Analýza vystýlky a kotvení – dílčí modely
  - Úroveň 2 (bloky)
  - Úroveň 3 (details)



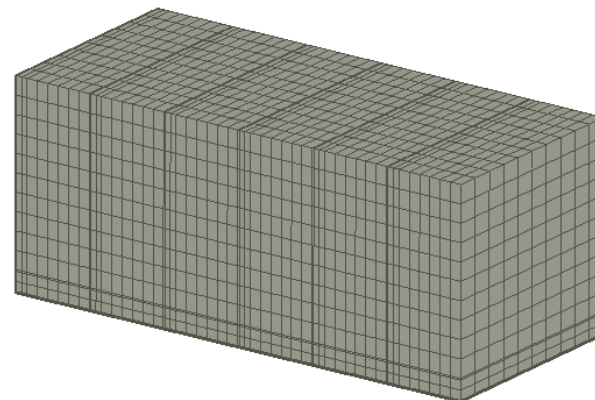
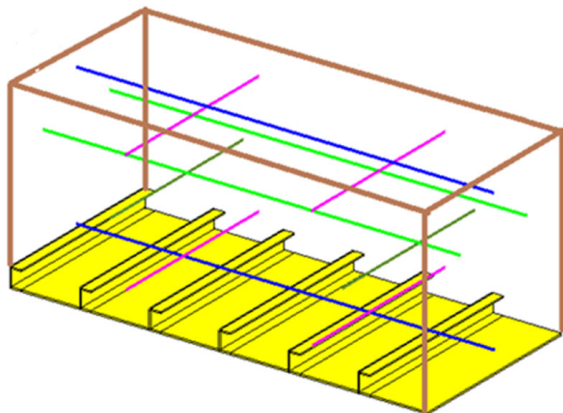
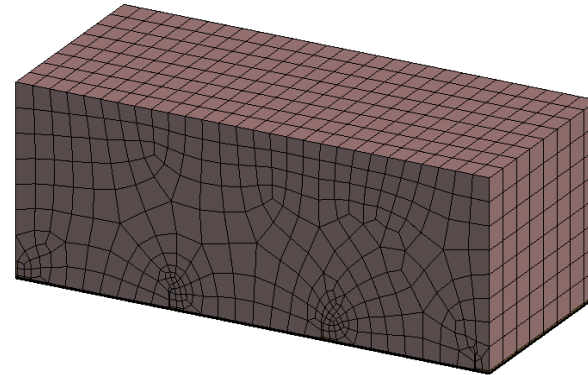
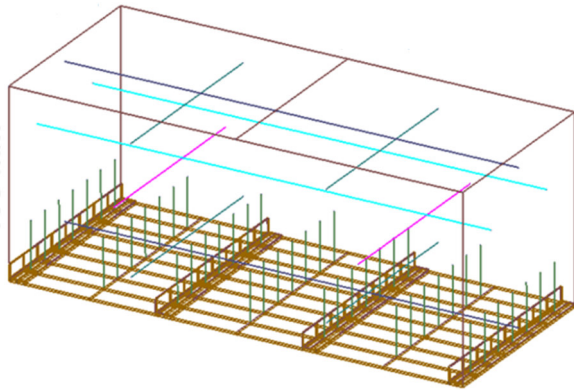
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Řezové modely: Celková odezva typických částí kce, včetně časově závislých účinků
- Tuhé spojení vystýlky a betonu



# Analýza vystýlky kontejnmentu

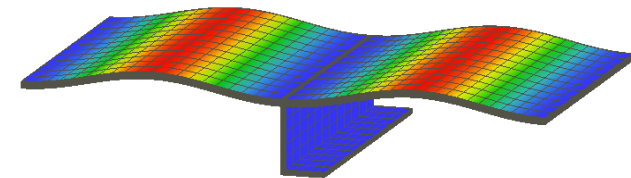
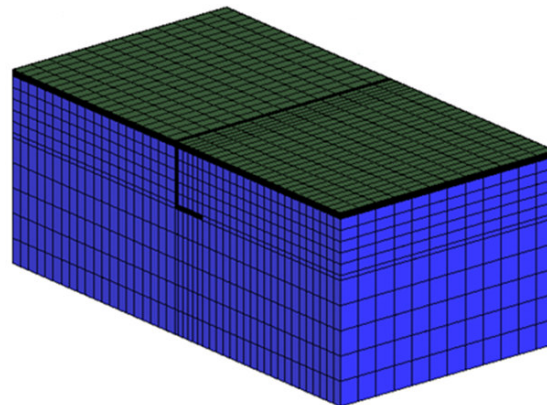
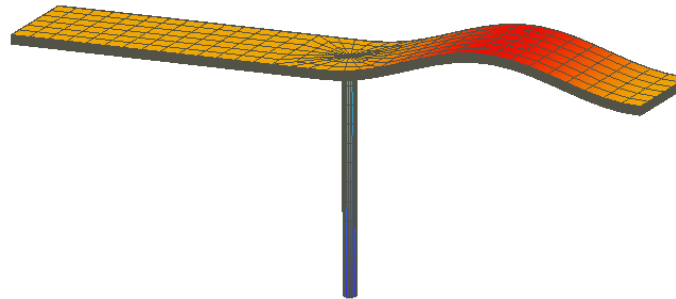
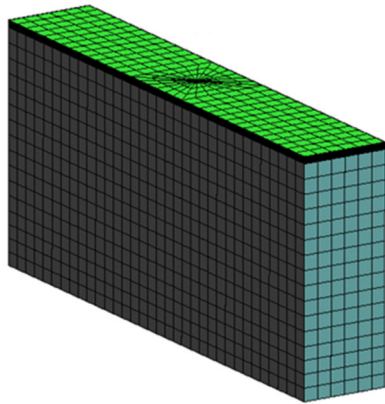
- Blokové modely: Interakce stěny a vystýlky – reálné parametry kontaktu
- Okrajové podmínky převzaty z řezových modelů





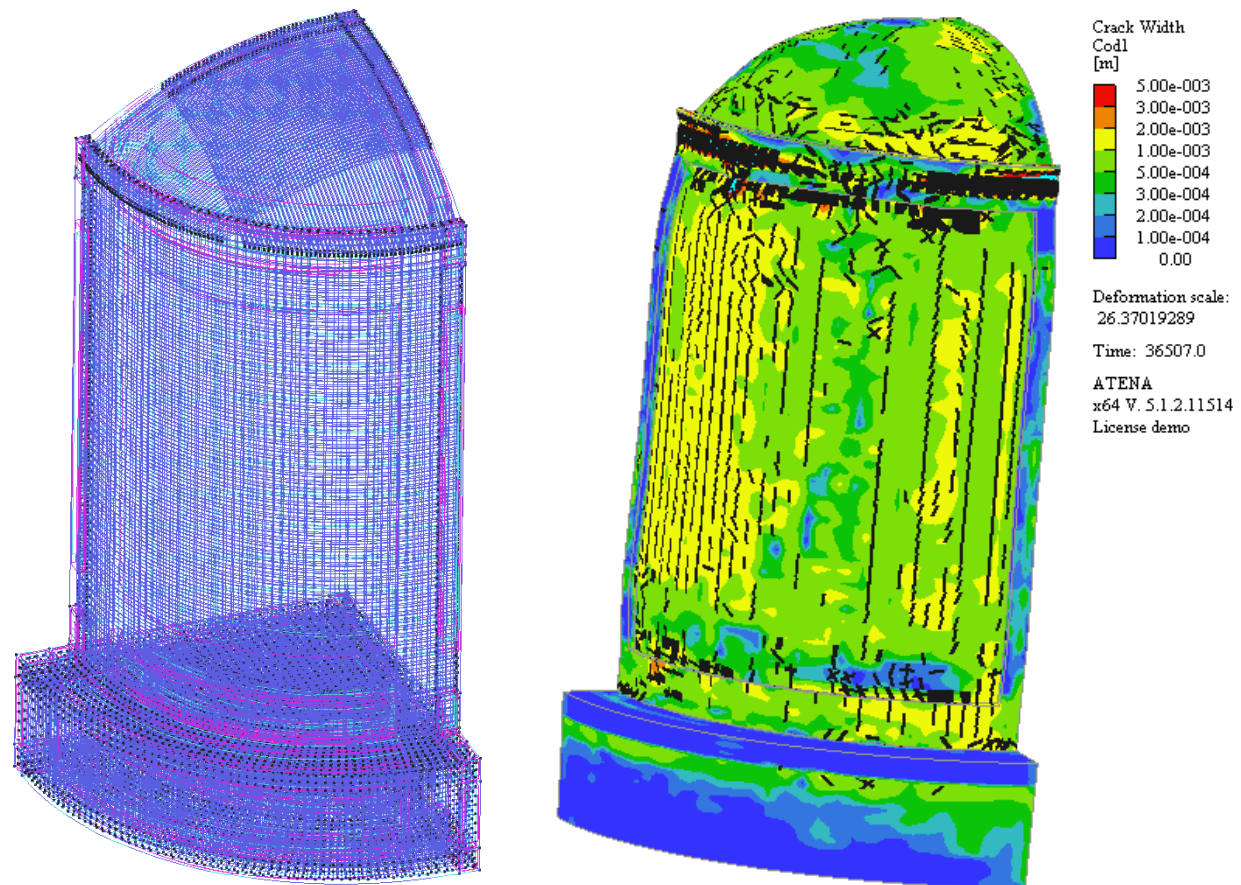
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Detailní modely: Chování kotevního prvku, vliv počátečních imperfekcí plechu
- Okrajové podmínky převzaty z blokových modelů



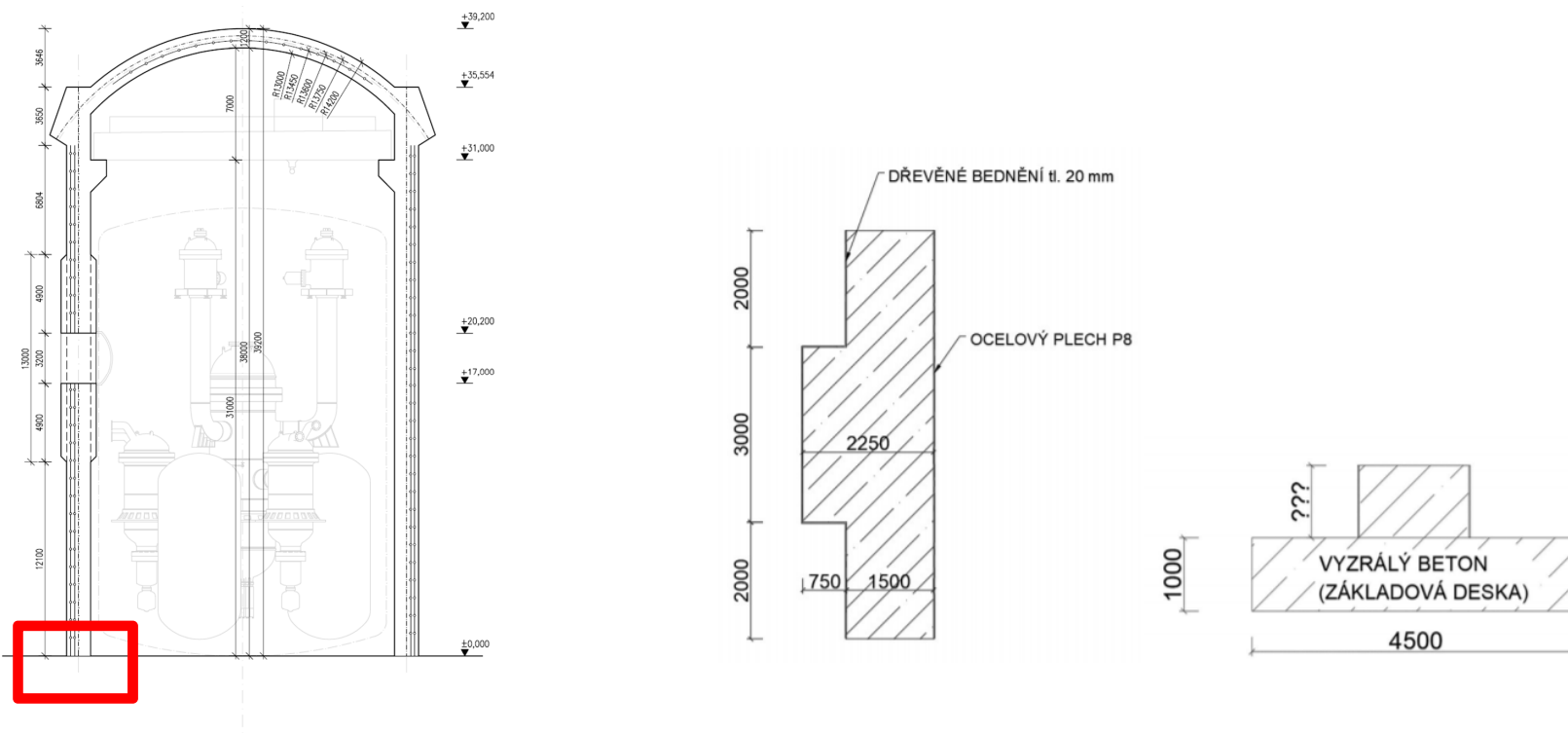
# Analýza vystýlky kontejnmentu

- Celkový model: Podíl vystýlky na skutečné únosnosti – až 30 %



# Betonáž kritického detailu kontejnmentu

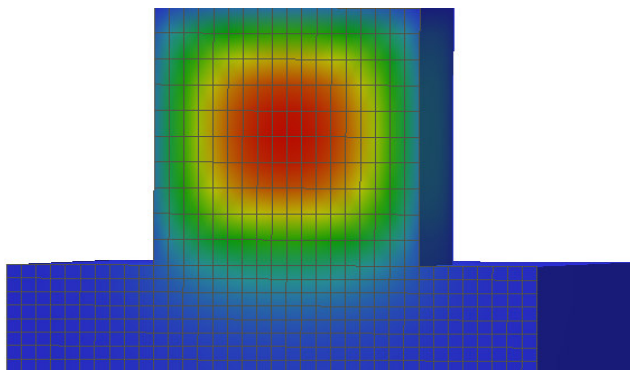
- Studentská práce (Aleš Mezera)
- Masivní konstrukce => teplo, trhliny
- Kritický detail – vliv složení, podmínek prostředí





# Betonáž kritického detailu kontejnmentu

- Stanovení teplotních spádů, špičkových teplot
- Dvě různá složení, letní/zimní betonáž
- Přípustná výška záběru betonáže

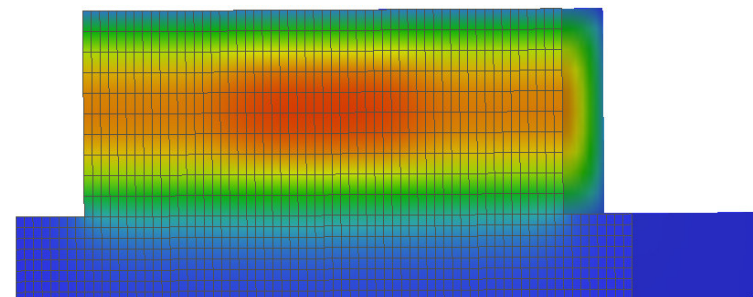


Current Psi  
Temper.  
[°C]

46.7
43.6
40.5
37.4
34.2
31.1
28.0
24.9
21.8

Time: 3.46e

ATENA  
x64 V. 5.6.1  
License 119  
CVUT, FSV



Current Psi  
Temper.  
[°C]

46.7
43.6
40.5
37.4
34.2
31.1
28.0
24.9
21.8

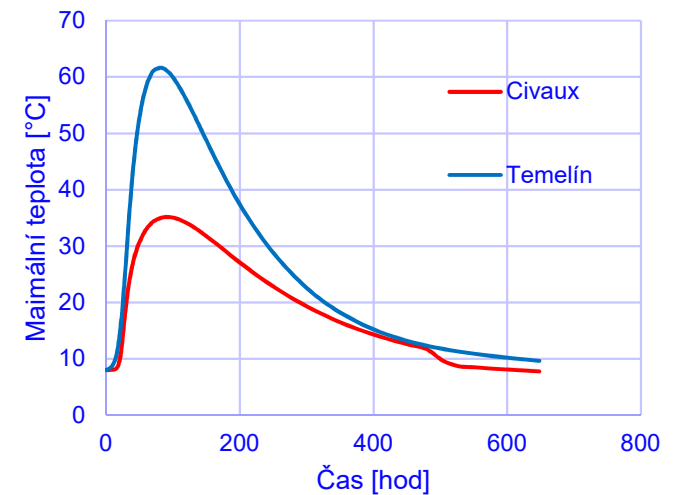
Time: 3.46e

ATENA  
x64 V. 5.6.1

# Betonáž kritického detailu kontejnmentu

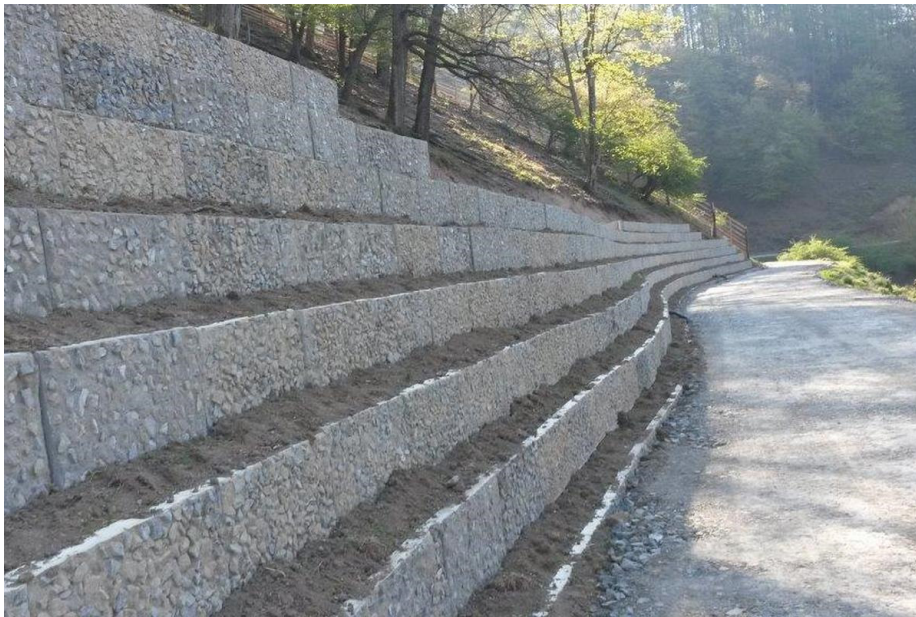
- Max. přípustná teplota 70°C
- Max. přípustný teplotní spád 25°C

Beton	Období	Výška [mm]	Max. teplota [°C]	Čas pro max. teploty [hod]	Teplotní spád [°C]
JE Temelín	Léto	550	47	30	24,1
		1500	70,7	54	49,2
		2000	77,3	72	55,4
	Zima	670	30	54	24,2
		1500	54,6	72	49,3
		2000	61,6	84	56,4
JE Civaux	Léto	2390	46,7	96	24,9
	Zima	1260	30,08	66	24,97
		2000	35,1	72	30



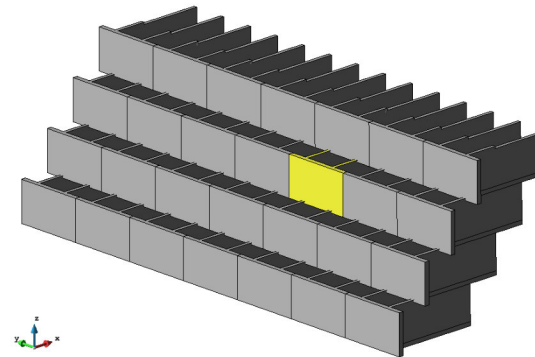
# Prefabrikát opěrné stěny (J. Novák)

- Vývoj prvků pro skládané opěrné stěny (SMP CZ)
- Optimalizace rozměrů, vyztužení
- Numerická analýza pro pilotní studii, fyzické zkoušky až pro optimalizované řešení



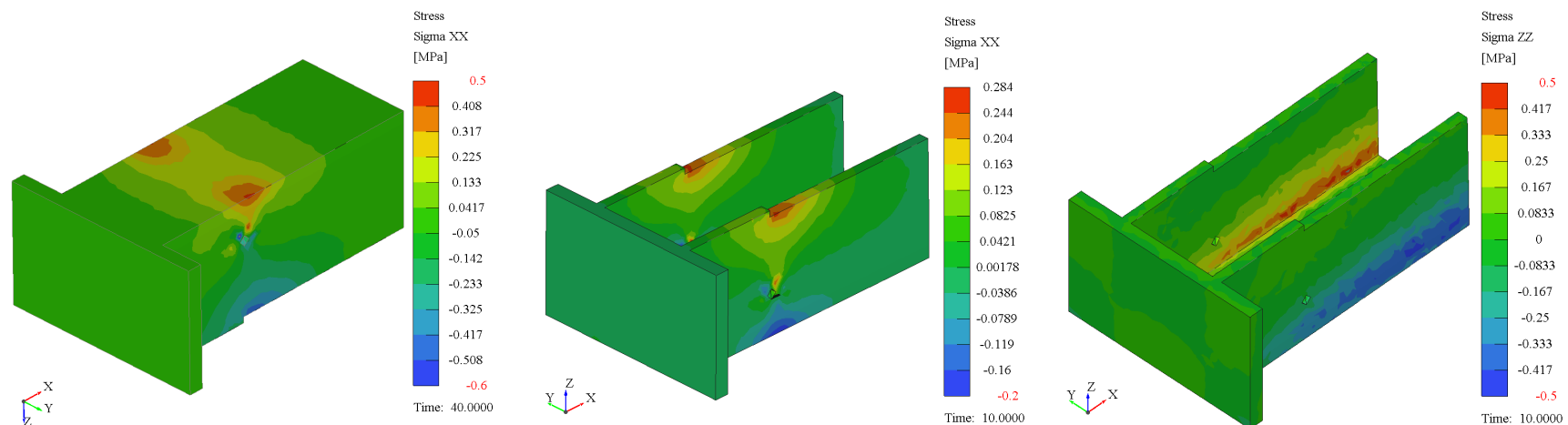
Zdroj: SMP CZ

[people.fsv.cvut.cz/www/bilypet1/](http://people.fsv.cvut.cz/www/bilypet1/)



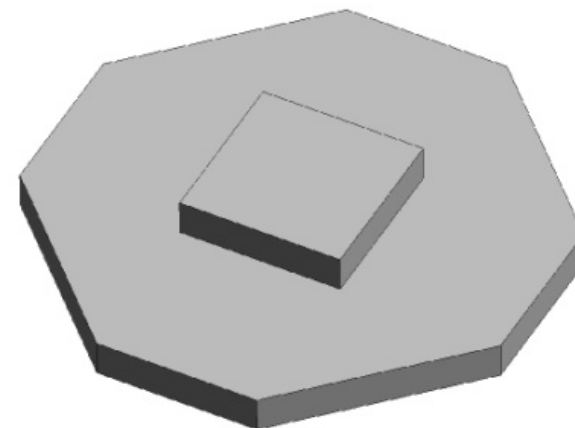
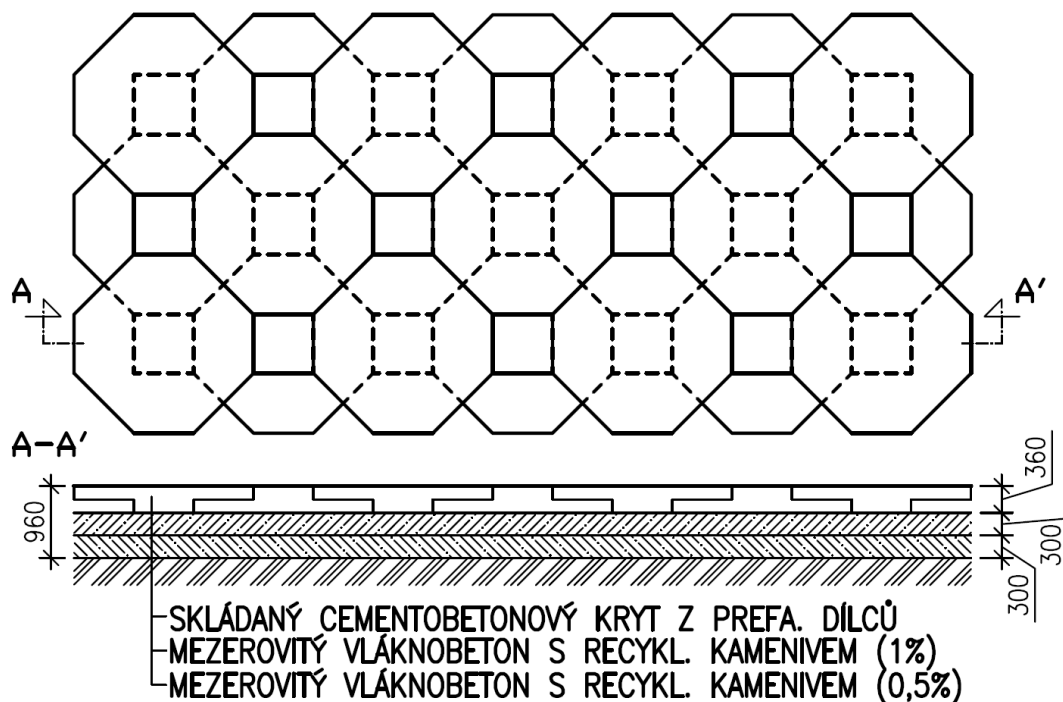
# Prefabrikát opěrné stěny (J. Novák)

- Parametry materiálu ze zkoušek na malých vzorcích
- Napjatost při odbednění, transportu, zabudování do konstrukce



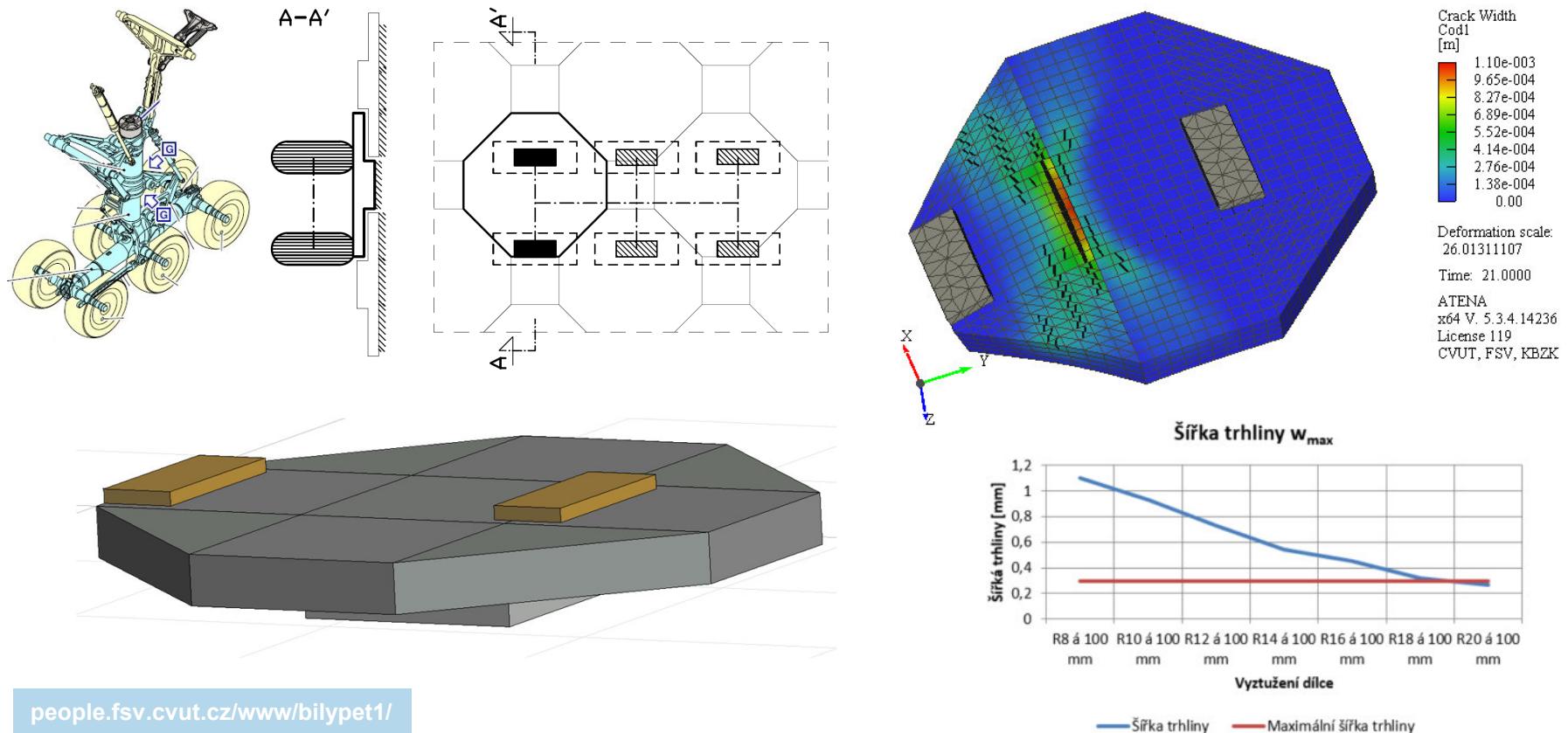
# Vývoj letištního panelu (J. Novák)

- Studentská práce (Miroslav Šrámek)
- Vývoj prefabrikátu pro letištní plochy



# Vývoj letištního panelu (J. Novák)

- Stanovení a ověření namáhání od pojezdu letadel
- Interakce s podložím
- Optimalizace rozměrů, vyztužení





# Literatura pro podrobnější studium

- [1] Fish, J., Belytschko, T.: A First Course in Finite Elements. John Wiley & Sons, Ltd., Chippenham, Velká Británie, 2007.
- [2] Jirásek, M., Zeman, J.: Přetváření a porušování materiálů: Dotvarování, plasticita, lom a poškození. ES ČVUT 2012. <http://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/b/b3/Ppm2012.pdf>
- [3] Červenka, V., Jendele, L., Červenka, J.: ATENA Program Documentation – Part 1: Theory. Prague, 2014. Spolu s dalšími manuály a praktickými příklady je součástí instalačního balíku programu ATENA dostupného na adrese: <https://www.cervenka.cz/cz/ke-stazeni/>
- [4] Červenka, V., Červenka, J., Janda, Z.: Posouzení bezpečnosti železobetonových konstrukcí v nelineárních výpočtech. Beton TKS 1/2007, s. 54-58. [https://www.betontks.cz/sites/default/files/2007-1-54\\_0.pdf](https://www.betontks.cz/sites/default/files/2007-1-54_0.pdf)
- [5] Bílý, P.: Víceúrovňová analýza chování ocelové vystýlky předpjatého betonového kontejmentu. Disertační práce. Praha, 2016. Částečně volně dostupné zde: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029549317306131>
- [6] Bílý, P.; Kohoutková, A.; Jedlinský, P: FEM simulation of static loading test of the Omega beam. BESTInfra Conference, Praha, 2017. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/236/1/012066>
- [7] Šrámek, M.: Numerická analýza betonového dílce pro letištní plochy. Diplomová práce, ČVUT 2017. Vedoucí: Novák, J. <https://dspace.cvut.cz/handle/10467/74324>
- [8] Kaufmann, W.: Compatible stress field design of structural concrete. Principles and validation. ETH Zurich, 2020.