

# Statistické vyhodnocení materiálových zkoušek

133YMVB | Modelování a vyztužování betonových prvků

Ing. Josef Novák, Ph.D.

11.03.2024

# VLASTNOSTI BETONU

- Mechanické vlastnosti betonu se odvíjí od jeho složení, kvality zastoupených složek a výrobní technologie
- Vzhledem k proměnnosti vstupních komponentů nelze nikdy vyrobit beton o naprosto stejných vlastnostech
- Vlastnosti (pevnostní třída) betonu deklarována dodavatelem betonu nebo výrobcem prefabrikovaného dílce

# VLASTNOSTI BETONU

- Tři základní přístupy ke stanovení pevnostních vlastností betonu:
  - a) ČSN EN 1990 – ed.2: Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí
  - b) ČSN EN 13 791: Posuzování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích a v prefabrikovaných betonových dílcích
  - c) ČSN ISO 13 822: Zásady navrhování konstrukcí – hodnocení existujících konstrukcí

# NÁVRHOVÁ HODNOTA

- Podle ČSN EN 1990 – ed.2 existují dva postupy pro stanovení návrhové hodnoty vlastností materiálu:
  - Stanovená charakteristická hodnota se dělí dílčím součinitelem (Metoda A - doporučená)
  - Návrhová hodnota se určí přímo s implicitním nebo explicitním uvážením konverze výsledků a celkové požadované spolehlivosti (Metoda B)

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

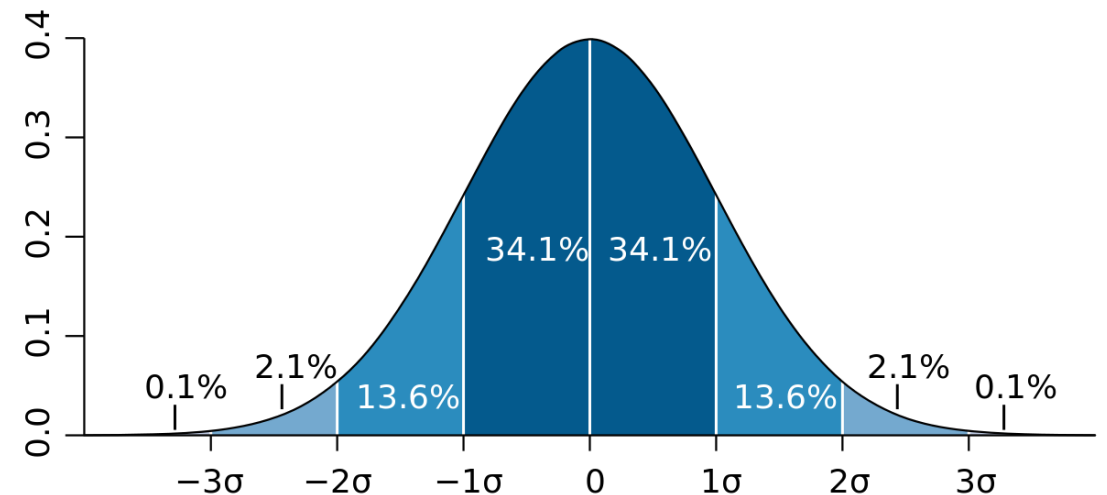
- Charakteristická hodnota se stanoví ze souboru dat z experimentálních zkoušek na sledovaném betonu, přičemž je nutné zohlednit následující parametry:
  - Rozptyl zkušebních dat
  - Statistická nejistota z hlediska počtu zkoušek
  - Apriorní statistická znalost

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

- Při uvážení normálního rozdělení pravděpodobnosti lze návrhovou hodnotu vlastnosti materiálu stanovit podle obecného vztahu:

$$X_d = \eta_d \frac{X_{k(n)}}{\gamma_m} = \frac{\eta_d}{\gamma_m} m_x (1 - k_n V_x)$$

$\eta_d$	Návrhová hodnota převodního součinitele
$\gamma_m$	Dílčí součinitel vlastnosti materiálu
$X_{k(n)}$	Charakteristická hodnota sledované veličiny
$m_x$	Střední hodnota sledované veličiny
$k_n$	Koeficient kvantilu charakteristické hodnoty
$V_x$	Variační koeficient



# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

- Dílčí součinitel spolehlivosti materiálu  $\gamma_m$  zohledňuje následující parametry:
  - Možné nepříznivé odchylky vlastnosti materiálu od charakteristické hodnoty
- Převodní součinitel  $\eta_d$  zohledňuje následující parametry:
  - Vliv objemu a rozměrů (size effect)
  - Účinky vlhkosti a teploty
  - Vliv dalších okolností

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

- Variační koeficient udává charakteristickou variabilitu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny a stanoví se z obecného vztahu:

$$V_x^* = \frac{s_x}{m_x} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - m_x)^2}}{m_x}$$

$n$  Počet měření

$s_x$  Výběrová směrodatná odchylka

$x_i$  Hodnota  $i$ -tého měření

$m_x$  Střední hodnota sledované veličiny



# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

- Konečná hodnota variačního koeficientu pro určení charakteristické hodnoty sledované veličiny betonu se musí určit s ohledem na apriorní statistické znalosti (ČSN EN 1990, ed.2).

Pilotní zkoušky materiálu



Žádné znalosti o chování materiálu



Variační koeficient neznámý



$$V_x = \max\{V_x^*; 0,1\}$$

Opakované zkoušky materiálu



Apriorní znalosti o chování materiálu



Variační koeficient známý



$$V_x = V_x^*$$

(případně hodnota zvolená dle odborného odhadu při uvážení předchozích hodnot variačního koeficientu)

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

- Součinitel  $k_n$  zohledňuje statistickou nejistotu z hlediska počtu zkoušek a apriorní statistické znalosti.

*Tab. Hodnoty  $k_n$  pro 5% charakteristickou hodnotu*

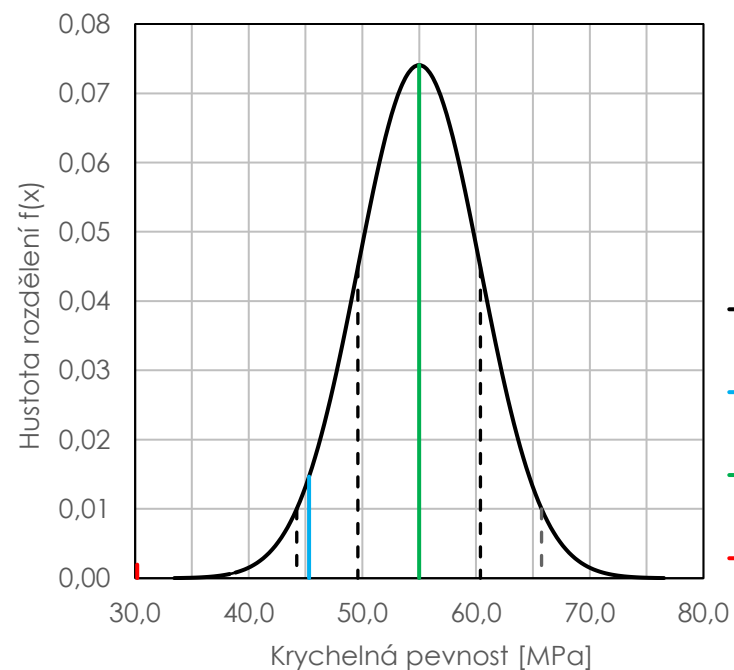
Počet měření (n)	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
$V_x$ známý	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$V_x$ neznámý	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA A

Měření	01	02	03	04	05
Pevnost [MPa]	55	52	62	58	48

Veličina	Symbol	Hodnota
Střední hodnota	$f_{cube,m}$	55,0
Směrodatná odchylka	$s (\sigma)$	5,39
Známy variační koeficient	$V_x$	0,098
Součinitel $k_n$	$k_n$	1,8
Charakteristická hodnota	$f_{cube,k}$	45,3
Návrhová hodnota	$f_{cube,d}$	30,2
Pevnostní třída C35/45		

## Krychelná pevnost v tlaku



$$f(x) = \frac{1}{s_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2s_x^2}}$$

- Normální rozdělení pravděpodobnosti
- Charakteristická hodnota
- Střední (průměrná) hodnota
- Návrhová hodnota - metoda A

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA B

- Přímý odhad návrhové hodnoty vychází z předpokladu, že návrhová hodnota odpovídá 0,1% pravděpodobnosti výskytu nižší hodnoty.
- Identicky jako u metody A výpočet návrhové hodnoty vychází z rozdělení (normální nebo log-normální) pravděpodobnosti náhodné veličiny

$$X_d = \eta_d m_x (1 - k_{d,n} V_x)$$

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA B

- Součinitel  $k_{d,n}$  zahrnuje vliv dílčího součinitele materiálu a zohledňuje statistickou nejistotu z hlediska počtu zkoušek a apriorní statistické znalosti

Tab. Hodnoty  $k_{d,n}$  pro 0,1% pravděpodobnost výskytu

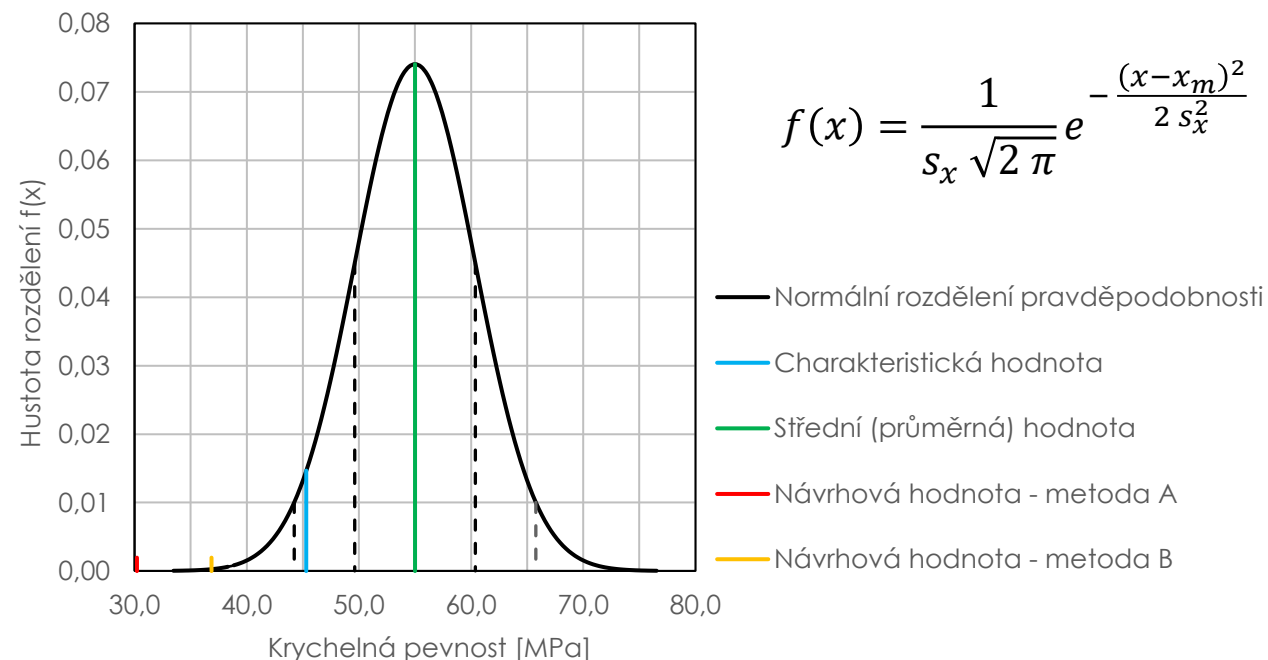
Počet měření (n)	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	$\infty$
$V_x$ známý	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,04
$V_x$ neznámý	-	-	-	11,40	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,04

# NÁVRHOVÁ HODNOTA – METODA B

Měření	01	02	03	04	05
Pevnost [MPa]	55	52	62	58	48

Veličina	Symbol	Hodnota
Střední hodnota	$f_{cube,m}$	55,0
Směrodatná odchylka	$\sigma (s)$	5,39
Známý variační koeficient	$V_x$	0,098
Součinitel $k_{d,n}$	$k_{d,n}$	3,37
Návrhová hodnota	$f_{cube,d}$	36,9

## Krychelná pevnost v tlaku



# ČSN EN 13791

- Určuje metody a postupy pro posuzování pevnosti betonu v tlaku v konstrukcích a prefabrikovaných betonových dílcích pomocí přímých metod (zkoušky vývrtů) a nepřímých metod (zkouška ultrazvukem, zkouška odrazovým tvrdoměrem)



# ČSN EN 13791 – obecné informace

Zkušební oblast = jeden nebo několik konstrukčních prvků nebo prefabrikovaných betonových dílců, o kterých je známo nebo se předpokládá, že jsou vyrobeny ze stejných složek a jsou stejné pevnostní třídy.

Zkušební místo = vymezená plocha vybraná k odhadu jednoho výsledku zkoušky, který se použije k vyhodnocení pevnosti betonu v tlaku v konstrukci



# ČSN EN 13791 – přístupy k posouzení

- 1) Odhad pevnosti v tlaku pro vyhodnocení existujících konstrukcí
  - a) Vyhodnocení pouze na výsledcích zkoušek na vývrtech
  - b) Vyhodnocení založené na kombinaci dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů:
    - Odhad charakteristické pevnosti v tlaku betonu v konstrukci pro zkušební oblast
    - Odhad pevnosti v tlaku betonu v konstrukci na konkrétním místě
  - c) Použití nepřímých zkoušek s daty z minimálně tří zkoušek vývrtů
- 2) Posouzení pevnostní třídy betonu v případě pochybností

# Počáteční vyhodnocení dat u existujících konstrukcích

- V případech, kdy sada dat obsahuje jeden nebo více výsledků zkoušek, které jsou neobvykle nízké nebo vysoké, provede se počáteční vyhodnocení souboru dat.
- Pro určení statisticky odlehlých hodnot se mohou použít výsledky přímých i nepřímých zkoušek.
- Staticky odlehlé hodnoty, pokud:

$$G_p < \frac{f_{c,m(n)is} - f_{c,is,lowest}}{s}$$

$$G_p < \frac{f_{c,is,highest} - f_{c,m(n)is}}{s}$$

# Počáteční vyhodnocení dat u existujících konstrukcích

Počet hodnot ze zkoušek	$G_p$	Počet hodnot ze zkoušek	$G_p$	Počet hodnot ze zkoušek	$G_p$
4	1,496	15	2,806	60	3,560
5	1,764	16	2,852	70	3,621
6	1,973	17	2,894	80	3,673
7	2,139	18	2,932	90	3,716
8	2,274	19	2,968	100	3,754
9	2,387	20	3,001	120	3,817
10	2,482	25	3,135	140	3,867
11	2,564	30	3,236	160	3,910
12	2,636	35	3,316	180	3,946
13	2,699	40	3,381	200	3,978
14	2,755	50	3,482	250	4,042

# Vyhodnocení pouze na výsledcích zkoušek na vývrtech

- Minimální počet platných výsledků zkoušek pro odhad charakteristické pevnosti v tlaku v konstrukci ve zkušební oblasti je **8 za předpokladu, že průměr vývrtnu je  $\geq 75$  mm**
- **12 platných hodnotách zkoušek** pevnosti v tlaku v konstrukci, kde každý je založen na jednotlivém **vývrtnu o průměru 50 mm** s maximální velikostí zrna **kameniva  $\leq 16$  mm**
- Dvě kritéria pro určení charakteristické pevnosti betonu v konstrukci

# Vyhodnocení pouze na výsledcích zkoušek na vývrtech

## 1.kritérium

$$f_{ck,is}^a = f_{cm,(n)is} - k_n s$$

$$s = \max \left( \sqrt{\frac{1}{n-1} * \sum (f_{c,is,i} - f_{cm,(n)is})^2}; 0,08 * f_{cm,(n)is} \right)$$

n	8	10	12	16	20	30	∞
k <sub>n</sub>	2,00	1,92	1,87	1,81	1,76	1,73	1,64

## 2.kritérium

$$f_{ck,is}^b = f_{c,is,lowest} + M$$

$f_{c,is,lowest}$ [MPa] (pro vývrty 2:1)	Rozpětí M [MPa]
≥ 20	4
≥ 16 < 20	3
≥ 12 < 16	2
< 12	1

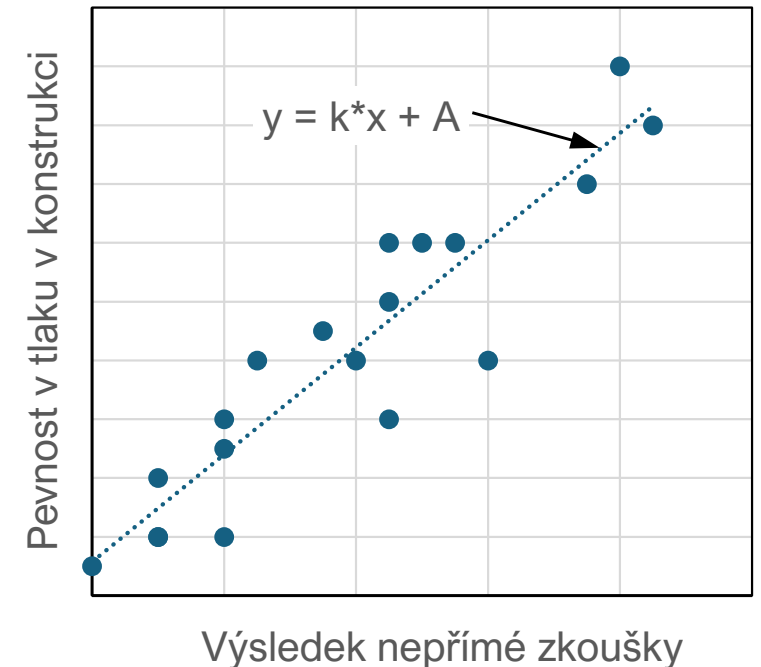
Charakteristická hodnota pevnosti betonu v tlaku v konstrukci:  $f_{ck,is} = \min(f_{ck,is}^a; f_{ck,is}^b)$

# Vyhodnocení pouze na výsledcích zkoušek na vývrtech

- U malých zkušebních oblastí, které zahrnují jeden až tři prvky a celkový objem nepřesáhne cca 10 m<sup>3</sup>, je třeba odebrat minimálně **3 vývrty s průměrem větší jak 75 milimetrů**
- Pevnost v tlaku betonu v konstrukci ( $f_{ck, is}$ ) se uvažuje jako **nejmenší hodnota ze tří nebo více vývrtů** za předpokladu, že **rozptyl výsledků zkoušek se neliší více jak 15% od střední hodnoty**

# Kombinace dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů

- Nepřímé zkoušky provést před odebráním vývrtů, které se následně provedou v místech měření nepřímými metodami
- Adekvátní korelaci mezi výsledky přímých a nepřímých zkoušek lze dosáhnout **při 8 párech výsledků, doporučuje se získat 10 párů.**
- Získané výsledky umožní určit závislost mezi nepřímou zkouškou a výsledky na vývrtech



# Kombinace dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů

- Všechna data z nepřímých zkoušek se převedou na ekvivalentní hodnotu z regresní rovnice včetně těch, která byla zjištěna v místech, kde existují výsledky zkoušek na vývrtech

$$f_{c,m(m)is} = \frac{\sum(f_{c,is,reg})}{m}$$

$f_{c,m(m)is}$       *Střední hodnota pevnosti v tlaku v konstrukci ze souboru zkušebních míst*

$f_{c,is,reg}$       *Hodnota pevnosti v tlaku získaná z regresního vztahu a z nepřímých zkoušek*

$m$               *Počet platných výsledků nepřímých zkoušek*



## Kombinace dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů

$$s_c = \max \left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_{c,is} - f_{c,is,reg})^2}{n-2}}; 2 \right) \quad s_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (f_{c,is,reg} - f_{c,m(m)is})^2}{m-1}}$$

$$s = \sqrt{s_c^2 + s_e^2}$$

$f_{c,m(m)is}$  Střední hodnota pevnosti v tlaku v konstrukci ze souboru zkušebních míst

$f_{c,is,reg}$  Hodnota pevnosti v tlaku získaná z regresního vztahu a z nepřímých zkoušek

$f_{c,is}$  Pevnost v tlaku vývrtu odebraného na zkušebním místě

$s_c$  Zbytková směrodatná odchylka odhadovaných hodnot pevnosti

$s_e$  Směrodatná odchylka všech odhadovaných hodnot pevnosti

$n$  Počet zkoušek vývrtů (počet párů výsledků zkoušek, které se používají pro vytvoření korelační křivky)

$m$  Počet platných výsledků nepřímých zkoušek

# Kombinace dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů

$$n_{eff} = \frac{(s_c^2 + s_e^2)^2}{\frac{s_c^4}{n-2} + \frac{s_e^4}{m-1}} \xrightarrow{k_n \text{ pro } n_{eff}+1}$$

$n_{eff}+1$	8	10	12	16	20	30	$\infty$
$k_n$	2,00	1,92	1,87	1,81	1,76	1,73	1,64

- Charakteristická hodnota pevnosti v tlaku betonu v konstrukci se uvažuje jako menší ze dvou hodnot:  $f_{ck,is} = \min(f_{ck,is}^a; f_{ck,is}^b)$

$$f_{ck,is}^a = f_{cm,(m)is} - k_{n,(neff+1)}S$$

$$f_{ck,is}^b = f_{c,is,lowest} + M$$

Menší hodnota z nejnižšího odhadu pevnosti a nejnižší pevnosti zjištěné na vývrtech

$f_{c,is,lowest}$ [MPa] (pro vývrty 2:1)	Rozpětí M [MPa]
$\geq 20$	4
$\geq 16 < 20$	3
$\geq 12 < 16$	2
$< 12$	1

# Kombinace dat z nepřímého zkoušení a dat ze zkoušení vývrtů

- Pokud je k dispozici výsledek zkoušky vývrtu  $\geq 75$  mm na konkrétním místě, je potřeba použít tuto hodnotu
- Odhadovaná pevnost v tlaku  $f_{c, is, est}$  na konkrétním místě se určí z následujícího vztahu:

$$f_{c, is, est} = f_{c, is, reg} - t_{(0,05, n-2)} * s_c \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_{i, cor} - \bar{x})^2}}$$

t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pro hladinu významnosti 5%, n-2 stupňů volnosti a jednostrannou zkoušku

$x_0$       *Hodnota nepřímé zkoušky ve sledovaném zkušebním místě*

$\bar{x}$       *Střední hodnota z "m" hodnot nepřímých zkoušek, které se používají pro korelaci*

$x_{i, cor}$       *Hodnota nepřímé zkoušky ve zkušební oblasti, která se používá pro korelaci*

## Nepřímé zkoušky s daty z minimálně tří vývrtů

- **U zkušebních oblastí do cca 30 m<sup>3</sup>** se provede **měření nepřímými metodami**, aby se určila variabilita výsledků a místa, kde vykazuje beton nízké hodnoty pevnosti.
- **V místech s nízkou pevností** se odeberou nejméně **tři vývrty o průměru alespoň 75 mm** (alt. více vývrtu o průměru 50 mm)
- Pevnost v tlaku betonu v konstrukci ( $f_{ck,is}$ ) se uvažuje jako **střední hodnota ze tří nebo více vývrtů** za předpokladu, že **rozptyl výsledků zkoušek není více jak 15% střední hodnoty**

# Pevnostní třída betonu v případě pochybností

Obvykle se jedná o konstrukce ve výstavbě, u kterých vyvstala pochybení o kvalitě betonu z různých důvodů:

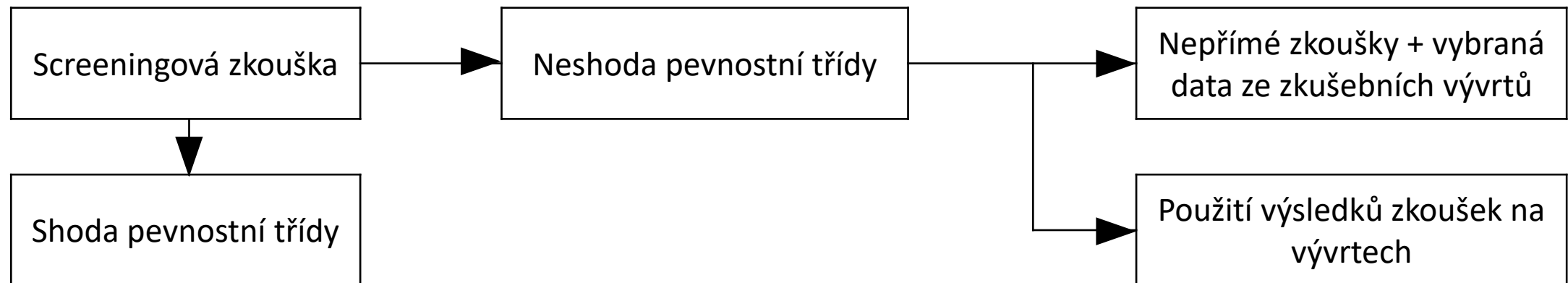
- Pochybná kvalita betonu dodávaného na stavbu
- Nekvalitní ukládání betonové směsi
- Nevhodné ošetřování betonu zhotovené konstrukce
- Výjimečná událost na stavbě



# Pevnostní třída betonu v případě pochybností

Postup ověření pevnostní třídy betonu se odvíjí od příčiny pochybení.

- Výrobce deklaroval neshodu: nezbytné odhalit příčinu a provést opatření nutná ke snížení rizika vzniku dalších neshod.
- Ostatní případy (zpracování, uložení, hutnění nebo ošetřování):



# Pevnostní třída betonu v případě pochybností

Screeningová zkouška:

- Pro zkoušení konstrukce je třeba použít stejný typ odrazového tvrdoměru nebo ultrazvukového vybavení, které se použilo pro stanovení závislosti.
- Vyhovující výsledky ze screeningové zkoušky ukazují na to, že beton odpovídá specifikované pevnostní třídě. V opačném případě to neznamena, že beton nesplňuje požadavky na předepsanou pevnostní třídu, ale pro ověření pevností třídy se musí použít přesnější postupy.

# Použití výsledků zkoušek na vývrtech

Rozdělení zkušební oblasti na podoblasti o velikosti cca 30 m<sup>3</sup>



S ohledem na množství podoblastí ve zkušební oblasti se určí počet zkušebních míst v každé podoblasti



Počet měření v každém zkušebním místě se odvíjí od velikosti vývrту



Střední a nejnižší hodnota pevnosti betonu v konstrukci s uvážením měření ve všech zkušebních místech se porovná s předepsanými kritérii



# Použití výsledků zkoušek na vývrtech

Požadavky		Průměr vývrту: 50 mm	Průměr vývrту $\geq 75$ mm	
Rozměr vývrту	Nominální poměr (délka: průměr)	1:1	2:1	1:1
	Povolený rozsah	0,9:1 až 1,1:1	1,95:1 až 2,05:1	0,9:1 až 1,1:1
Minimální počet hodnot pevnosti v tlaku pro získání výsledků zkoušek na zkušebním místě		3	1	1
Pevnost v tlaku v konstrukci na zkušebním místě ( $f_{c, is}$ )		$CLF * f_{c, 1:1 \text{ core}}$	$f_{c, 2:1 \text{ core}}$	$CLF * f_{c, 1:1 \text{ core}}$

Počet cca 30 m <sup>3</sup> podoblastí ve zkušební oblasti	Minimální množství zkušebních míst pro každou podoblast	Střední hodnota výsledků zkoušek na vývrtech pro zkušební oblast	Nejnižší výsledek zkoušky na vývrtech ze zkušebních míst
1	3	-	$\geq 0,85 * (f_{ck, spec} - M)$
2 až 4	2	$\geq 0,85 * (f_{ck, spec} + 1)$	$\geq 0,85 * (f_{ck, spec} - M)$
5 až 6	2	$\geq 0,85 * (f_{ck, spec} + 2)$	$\geq 0,85 * (f_{ck, spec} - M)$

Pevnostní třída betonu	M [MPa]
C 20/25 a vyšší	4
C 16/20	3
C 12/15	2
C 8/10	1

## Nepřímé zkoušky plus vybraná data ze zkušebních vývrtů (2b)

Rozdělení zkušební oblasti na podoblasti o velikosti cca 30 m<sup>3</sup>



S ohledem na množství podoblastí ve zkušební oblasti se určí počet zkušebních míst pro nepřímé zkoušky v každé oblasti



V každém zkušebním místě se provede zkouška odrazovým tvrdoměrem podle ČSN EN 12504-2 nebo ultrazvuková impulsová zkouška podle ČSN EN 12504-4



Provedení vývrtů s ohledem na počet podoblastí a výsledky nepřímých zkoušek



Pevnosti určené na vývrtech se porovnají s předepsanými kritérii

# Nepřímé zkoušky plus vybraná data ze zkušebních vývrtů

Počet cca 30 m <sup>3</sup> podoblastí ve zkušební oblasti	Minimální počet míst pro nepřímé zkoušky ve zkušební oblasti	Pevnostní třída betonu	M [MPa]
1	9	C 20/25 a vyšší	4
2 až 4	12	C 16/20	3
5 až 6	20	C 12/15	2
		C 8/10	1

Počet cca 30 m <sup>3</sup> podoblastí ve zkušební oblasti	Minimální množství zkušebních míst pro každou podoblast	Střední hodnota výsledků zkoušek na vývrtech pro zkušební oblast	Nejnižší výsledek zkoušky
1	Jeden vývrt na každé ze dvou nejnižších hodnot z nepřímých zkoušek ve zkušební oblasti	-	$\geq 0,85 * (f_{ck,spec} - M)$
2 až 4	Jeden vývrt na nejnižší hodnotě z nepřímých zkoušek ve zkušební oblasti a jeden vývrt na každém ze dvou zkušebních míst, která jsou nejbližší mediánu velikosti odrazu nebo střední hodnotě rychlosti šíření ultrazvukového impulsu pro zkušební oblast.	$\geq 0,85 * (f_{ck,spec} + 1)$	$\geq 0,85 * (f_{ck,spec} - M)$
5 až 6		$\geq 0,85 * (f_{ck,spec} + 2)$	$\geq 0,85 * (f_{ck,spec} - M)$

# DOMÁCÍ ÚLOHA

- Předmětem úlohy je stanovit pevnostní třídu betonu, která odpovídá výsledkům z experimentálních zkoušek sledovaného betonu při uvážení metody A a normálního (Gaussova) rozdělení.
- Postup zpracování:
  - Vyčíslení základních parametrů: střední hodnota, variační koeficient, charakteristická hodnota, návrhová hodnota
  - Zatřídění zkoušeného betonu z hlediska pevnostní třídy a vykreslení grafu rozdělení pravděpodobnosti sledované veličiny