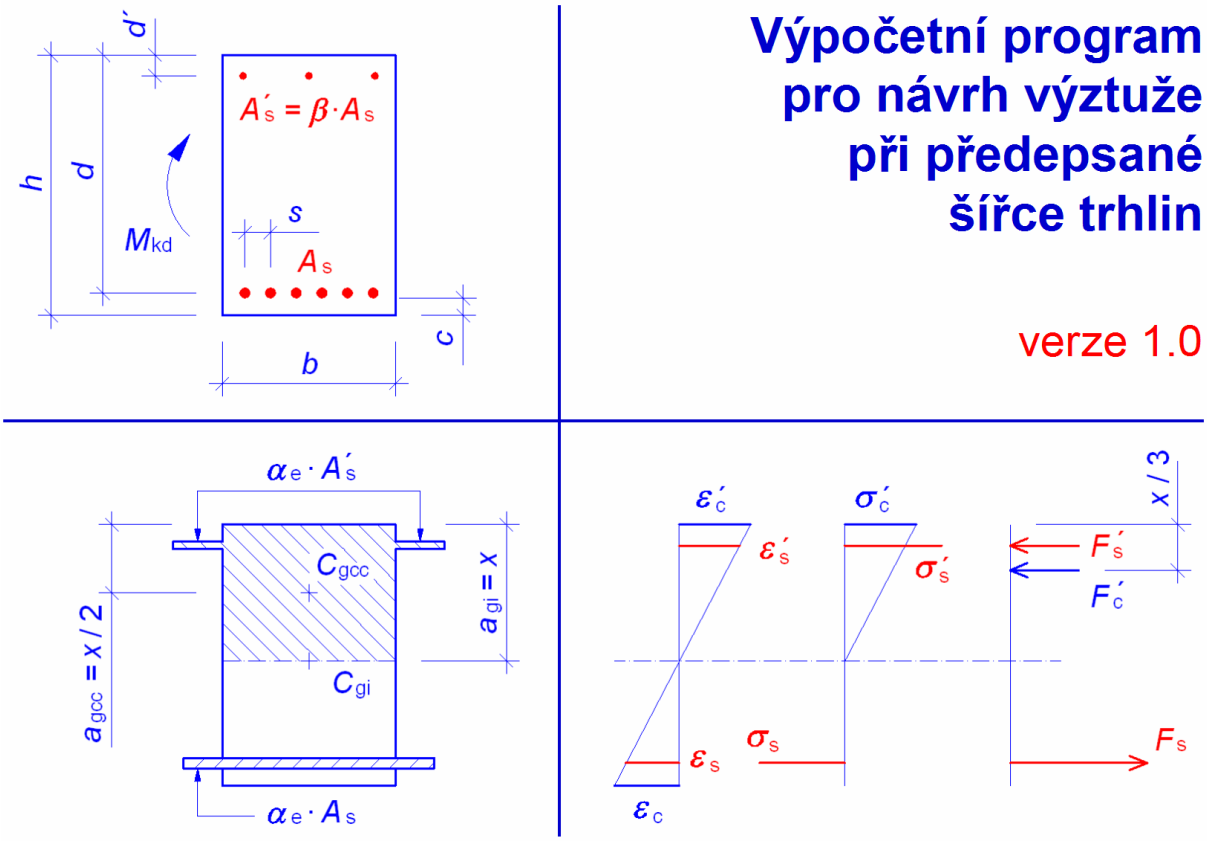
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta stavební
Katedra betonových a zděných konstrukcí

Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin

Uživatelská příručka

Radek Štefan, Jaroslav Procházka



Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin

verze 1.0

Praha 2009

verze 1.0.a

Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin

Uživatelská příručka
Verze 1.0.a

© Radek Štefan, Jaroslav Procházka, Praha 2009

Tato práce vznikla za podpory výzkumného záměru MSM 6840770001 Spolehlivost, optimalizace a trvanlivost stavebních materiálů a konstrukcí.

Citace této práce

Program

Štefan, R. – Procházka J. *Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin* [software online]. Verze 1.0 (2009). Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra betonových a zděných konstrukcí, 2009. Poslední aktualizace 30. 12. 2009.
URL <http://concrete.fsv.cvut.cz/~stefan/vyzkum.htm>.

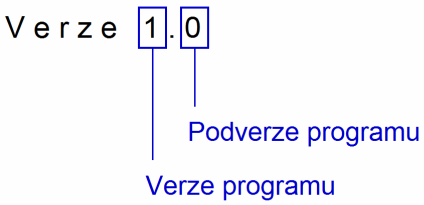
Uživatelská příručka

Štefan, R. – Procházka J. *Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin. Uživatelská příručka* [online]. Verze 1.0.a (2009). Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra betonových a zděných konstrukcí, 2009. Poslední aktualizace 30. 12. 2009.
URL <http://concrete.fsv.cvut.cz/~stefan/vyzkum.htm>.

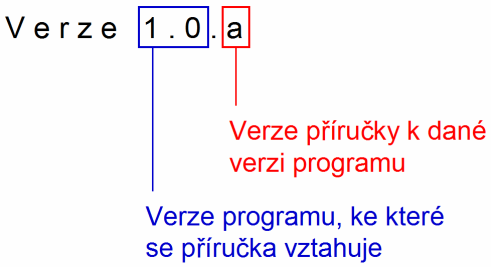
Komentáře a připomínky prosím zasílejte na e-mail: radek.stefan@fsv.cvut.cz

Způsob značení verzí programu a uživatelské příručky

Program



Uživatelská příručka



Aktuálně platné verze

Program	Verze 1.0	(30. 12. 2009)
Uživatelská příručka	Verze 1.0.a	(30. 12. 2009)

Změny ve verzích

V programu ani v uživatelské příručce nebyly provedeny žádné změny.

Obsah

1 Úvod 6

2 Odvození postupu výpočtu 7

2.1 Základní vztahy pro výpočet šířky trhlin 7

2.2 Výpočet charakteristik ideálního průřezu 9

2.3 Úprava vztahů 13

2.4 Postup výpočtu 16

3 Popis programu 21

3.1 Instalace, spuštění programu 21

3.2 Návrh výztuže 23

3.3 Výpočet šířky trhlin 29

4 Seznam použitých zdrojů 36

1 Úvod

Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin slouží k určení minimální plochy výztuže v železobetonových obdélníkových průřezech namáhaných ohybovým momentem s ohledem na předepsanou šířku trhlin.

Minimální plocha výztuže se určí přímým výpočtem s využitím vztahů uvedených v normě ČSN EN 1992-1-1 [1] a za použití algoritmů popsaných v publikacích [2, 3].

Program jednak umožňuje návrh minimální plochy tahové (případně i tlakové) výztuže při zadání ostatních parametrů průřezu (geometrie a materiálů), předepsané šířky trhliny a návrhové hodnoty ohybového momentu pro příslušnou kombinaci zatížení, jednak slouží pro výpočet šířky trhlin v prvku s definovaným průřezem, vyztužením a účinkem zatížení.

Program byl vytvořen v prostředí matematického nástroje **MATLAB R2007a** [4].

2 Odvození postupu výpočtu

Výpočet vychází ze vtahů uvedených v normě ČSN EN 1992-1-1 [1], čl. 7.3. Při odvození postupu výpočtu byly použity algoritmy popsané v publikaci [2], čl. 7.4.1, resp. v publikaci [3], čl. 7.3.4.7.1.

2.1 Základní vztahy pro výpočet šířky trhlin

Šířku trhlin w_k lze podle normy [1] stanovit ze vtahu (2.1)

$$w_k = s_{r,max} \cdot (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}), \tag{2.1}$$

kde $s_{r,max}$ je maximální vzdálenost trhlin, viz vztah (2.2a), resp. (2.2b),
ε_{sm} je průměrná hodnota poměrného přetvoření výztuže pří příslušné kombinaci zatížení, zahrnující účinek vnesených deformací a přihlížející k účinkům tahového ztužení,
ε_{cm} je průměrná hodnota poměrného přetvoření betonu mezi trhlinami.

Maximální vzdálenost trhlin $s_{r,max}$ se určí ze vztahu (2.2a).

Pokud vzdálenost soudržné výztuže překročí hodnotu 5 · (c + ϕ / 2), nebo pokud soudržná výztuž není v tažené oblasti, lze horní mez šířky trhlin stanovit za předpokladu maximální vzdálenosti trhlin podle vztahu (2.2b).

$$s_{r,max} = k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \phi / \rho_{p,eff}\,, \tag{2.2a}$$

$$s_{r,max} = 1{,}3 \cdot (h - x), \tag{2.2b}$$

kde ϕ je průměr prutu podélné tahové výztuže,
c je krycí vrstva podélné tahové výztuže,
k_1 je součinitel pro zohlednění vlastností soudržné výztuže:
k_1 = 0,8 pro pruty s velkou soudržností,
k_1 = 1,6 pro pruty s hladkým povrchem,
k_2 je součinitel pro zohlednění rozdělení poměrného přetvoření:
k_2 = 0,5 pro ohyb,
k_2 = 1,0 pro prostý tah,
k_3, k_4 jsou součinitele, jejichž hodnoty jsou uvedeny v národní příloze normy [1]; pro ČR platí doporučení hodnoty:
k_3 = 3,4,
k_4 = 0,425,
$\rho_{p,eff}$ se určí podle vztahu (2.3), za předpokladu použití pouze betonářské výztuže (tj. bez předpínací výztuže),
h je celková výška průřezu,
x je vzdálenost neutrální osy od nejvíce tlačeného okraje průřezu.

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}\,, \tag{2.3}$$

kde A_s je plocha tahové výztuže,
$A_{c,eff}$ je účinná plocha taženého betonu obklopující výztuž (viz obr. 2.1), pro obdélníkový průřez se určí ze vztahu (2.4)

$$A_{c,eff} = b \cdot h_{c,eff}\,, \tag{2.4}$$

kde b je šířka průřezu,

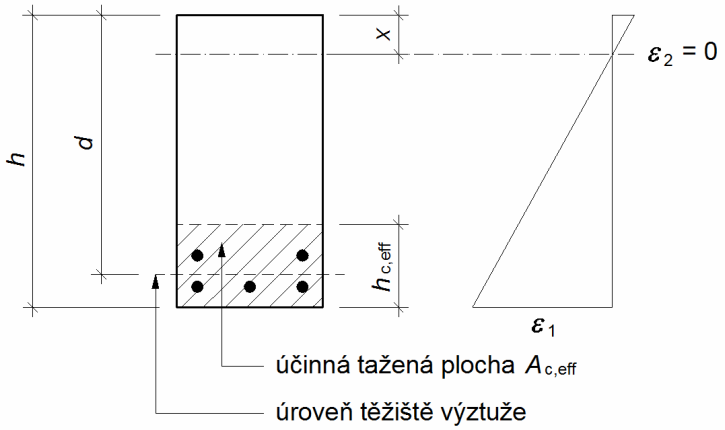
$h_{c,eff}$ je výška účinné plochy taženého betonu, určí se ze vztahu (2.5), který pro možnost snazšího odvolávání v textu rozepíšeme do vztahů (2.5a, b, c)

$$h_{c,eff} = \min\left\{2{,}5\cdot(h-d);\ \frac{h-x}{3};\ \frac{h}{2}\right\}, \tag{2.5}$$

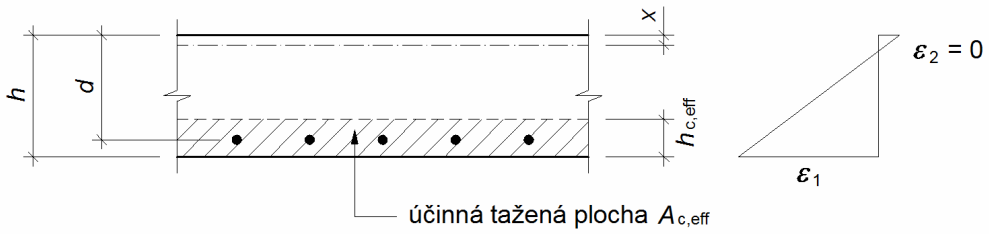
$$h_{c,eff} = 2{,}5\cdot(h-d), \quad h_{c,eff} = \frac{h-x}{3}, \quad h_{c,eff} = \frac{h}{2}, \tag{2.5a, b, c}$$

kde d je účinná výška průřezu.

a) nosník



b) deska



Obr. 2.1 Účinná tažená plocha betonu (typické případy ohýbaných prvků)

Rozdíl poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$), vyskytující se ve vztahu (2.1), se určí ze vztahu (2.6), který pro možnost snazšího odvolávání v textu rozepíšeme do vztahů (2.6a, b)

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_s - k_t\cdot\frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}}\cdot(1+\alpha_e\cdot\rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0{,}6\cdot\frac{\sigma_s}{E_s}, \tag{2.6}$$

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = \frac{\sigma_s - k_t\cdot\frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}}\cdot(1+\alpha_e\cdot\rho_{p,eff})}{E_s}, \tag{2.6a}$$

$$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0{,}6\cdot\frac{\sigma_s}{E_s}, \tag{2.6b}$$

kde σ_s je napětí v tahové výztuži stanovené v průřezu porušeném trhlinou,
k_t je součinitel závisící na době trvání zatížení:
$k_t = 0{,}6$ pro krátkodobé zatížení,
$k_t = 0{,}4$ pro dlouhodobé zatížení,
$f_{ct,eff}$ je průměrná hodnota pevnosti betonu v tahu v okamžiku prvního očekávaného vzniku trhlin: $f_{ct,eff} = f_{ctm}$ nebo nižší (jestliže je vznik trhlin předpokládán dříve než za 28 dní, má se uvažovat $f_{ct,eff} = f_{ctm}(t)$),
E_s je návrhová hodnota modulu pružnosti betonářské oceli,
α_e se určí ze vztahu (2.7),

$$\alpha_e = E_s / E_{cm}\,, \tag{2.7}$$

kde E_{cm} je střední hodnota sečnového modulu pružnosti betonu ve stáří 28 dní.

2.2 Výpočet charakteristik ideálního průřezu

V následujícím budou popsány charakteristiky ideálního průřezu pro železobetonový obdélníkový průřez namáhaný ohybovým momentem M_{kd}.

Uvažujeme průřez šířky b a výšky h, viz obr. 2.2 a obr. 2.3, kde

A_c je plocha betonové části průřezu,
A_{cc} je plocha tlačené betonové části průřezu,
A_s je plocha podélné tahové betonářské výztuže,
A_s' je plocha podélné tlakové betonářské výztuže, ve výpočtu ji budeme uvažovat jako β násobek plochy A_s, viz výraz (2.8),
d je vzdálenost těžiště plochy tahové výztuže od tlačeného okraje průřezu,
d' je vzdálenost těžiště plochy tlakové výztuže od tlačeného okraje průřezu,
C_{gc} je těžiště betonového průřezu,
C_{gcc} je těžiště tlačené části betonového průřezu,
a_{gc} je vzdálenost těžiště betonového průřezu od tlačeného okraje průřezu,
a_{gcc} je vzdálenost těžiště tlačené části beton. průřezu od tlačeného okraje průřezu,
C_{gi} je těžiště ideálního průřezu,
a_{gi} je vzdálenost těžiště ideálního průřezu od tlačeného okraje průřezu.

$$A_s' = \beta \cdot A_s \qquad \rightarrow \qquad \beta = A_s' / A_s\,, \tag{2.8}$$

kde β koeficient vyztužení tlakovou výztuží.

a) Průřez bez trhliny

Ideální průřez tvořený plochou tlačené a tažené části betonového průřezu a α_e násobkem plochy tlakové a tahové výztuže je uveden na obr. 2.2.

Základní charakteristiky ideálního průřezu bez trhliny jsou:

– plocha ideálního průřezu A_i

$$A_i = A_c + \alpha_e \cdot \left(A_s + A_s'\right) = b \cdot h + \alpha_e \cdot \left(A_s + A_s'\right), \tag{2.9}$$

– vzdálenost těžiště ideálního průřezu od tlačeného okraje průřezu a_{gi}

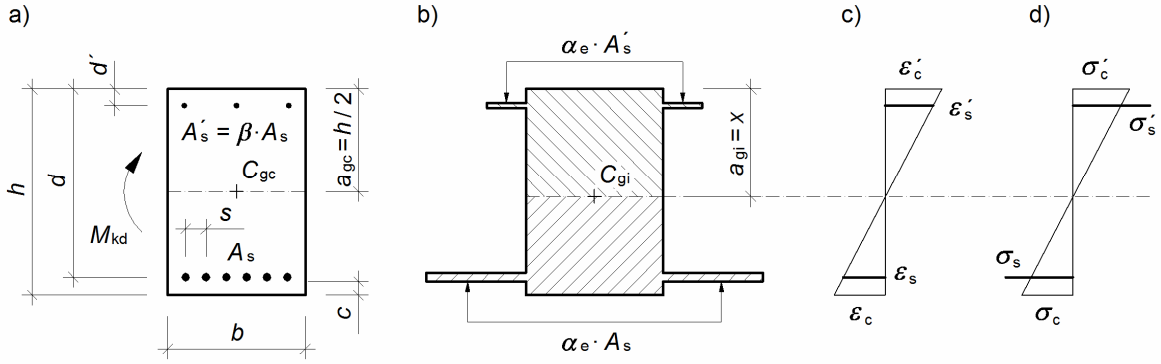
$$a_{gi} = \frac{A_c \cdot a_{gc} + \alpha_e \cdot \left(A_s \cdot d + A_s' \cdot d'\right)}{A_i} = \frac{b \cdot h \cdot h/2 + \alpha_e \cdot \left(A_s \cdot d + A_s' \cdot d'\right)}{A_i}, \tag{2.10}$$

– moment setrvačnosti ideálního průřezu k těžišti ideálního průřezu I_i

$$I_i = I_c + A_c \cdot \left(a_{gi} - a_{gc}\right)^2 + \alpha_e \cdot \left[A_s \cdot \left(d - a_{gi}\right)^2 + A_s' \cdot \left(a_{gi} - d'\right)^2\right]$$

$$I_i = \frac{1}{12} b \cdot h^3 + b \cdot h \cdot \left(a_{gi} - \frac{h}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot \left[A_s \cdot \left(d - a_{gi}\right)^2 + A_s' \cdot \left(a_{gi} - d'\right)^2\right]. \qquad (2.11)$$

Ve vztahu (2.11) jsou zanedbány momenty setrvačnosti tlakové i tahové výztuže k jejich těžištím, neboť se u obvyklých průřezů jedná o hodnoty podstatně menší, než jsou hodnoty zbývajících veličin.



Obr. 2.2 Průřez bez trhliny:
a) železobetonový průřez s tlakovou a tlakovou výztuží; b) ideální průřez bez trhliny,
c) poměrné přetvoření průřezu, d) napětí v betonu a ve výztuži

Napětí v tahové a tlakové výztuži a napětí v betonu v krajních vláknech průřezu se určí ze vtahů (2.12a, b, c, d).

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \frac{M_{kd} \cdot \left(d - a_{gi}\right)}{I_i}, \qquad (2.12a)$$

$$\sigma_s' = -\alpha_e \cdot \frac{M_{kd} \cdot \left(a_{gi} - d'\right)}{I_i}, \qquad (2.12b)$$

$$\sigma_c = \frac{M_{kd} \cdot \left(h - a_{gi}\right)}{I_i}, \qquad (2.12c)$$

$$\sigma_c' = -\frac{M_{kd} \cdot a_{gi}}{I_i}, \qquad (2.12d)$$

kde σ_s je napětí v tahové výztuži,
σ_s' je napětí v tlakové výztuži,
σ_c je tahové napětí v betonu na nejvíce taženém okraji průřezu,
σ_c' je tlakové napětí v betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu,
M_{kd} je návrhová hodnota ohybového momentu pro příslušnou kombinaci zatížení (jelikož je průřez namáhán pouze ohybovým momentem, není nutné provádět transformaci účinků zatížení k těžišti ideálního průřezu).

Je zřejmé, že trhliny v průřezu vzniknou, pokud tahové napětí v betonu na nejvíce taženém okraji průřezu překročí efektivní hodnotu pevnosti betonu v tahu, tj. v případě

$$\sigma_c > f_{ct,eff}. \qquad (2.13a)$$

Pro průřez namáhaný pouze ohybovým momentem M_{kd} je výhodné přepsat podmínku (2.13a) do tvaru

$$M_{kd} > M_{cr}\,, \tag{2.13b}$$

kde M_{cr} je kritický moment při vzniku trhlin, který se určí podle vztahu (2.14)

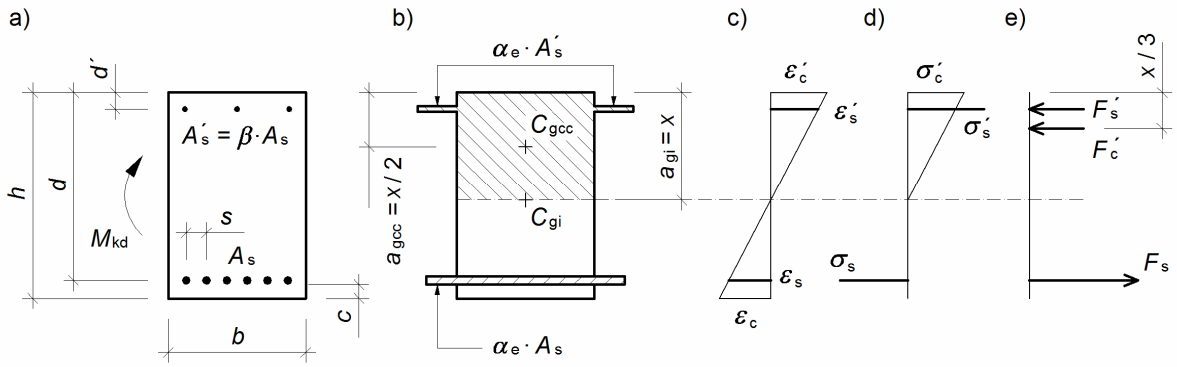
$$M_{cr} = f_{ct,eff} \cdot \frac{I_i}{h - a_{gi}}\,. \tag{2.14}$$

b) Průřez s trhlinou a tlačenou částí

Pokud platí podmínka (2.13a), resp. (2.13b), a zároveň je splněna podmínka (2.15)

$$\sigma_c' < 0\,, \tag{2.15}$$

je zřejmé, že průřez je porušen tahovými trhlinami a část průřezu je namáhána tlakem. Charakteristiky ideálního průřezu se určí za předpokladu, že beton v tažené části průřezu nepůsobí, poměrné přetvoření průřezu je po výšce lineární a napětí v betonu v tlačené části průřezu a napětí v tlakové a tahové výztuži je přímo úměrné poměrnému přetvoření, přičemž konstantami úměrnosti jsou moduly pružnosti daného materiálu, viz obr. 2.3.



Obr. 2.3 Průřez s trhlinou a tlačenou částí:
a) železobetonový průřez s tlakovou a tlakovou výztuží; b) ideální průřez s trhlinou,
c) poměrné přetvoření průřezu, d) napětí v betonu a ve výztuži, e) síly v betonu a ve výztuži

Poměrná přetvoření tlakové a tahové výztuže určíme z podobnosti trojúhelníku, viz obr. 2.3,

$$\frac{\varepsilon_s}{d - x} = -\frac{\varepsilon_c'}{x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = -\varepsilon_c' \cdot \frac{d - x}{x}\,, \tag{2.16a}$$

$$\frac{\varepsilon_s'}{x - d'} = \frac{\varepsilon_c'}{x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s' = \varepsilon_c' \cdot \frac{x - d'}{x}\,, \tag{2.16b}$$

kde ε_s je poměrné přetvoření tahové výztuže,
ε_s' je poměrné přetvoření tlakové výztuže,
ε_c' je poměrné přetvoření betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu.

Výslednice sil v betonu a ve výztuži určíme ze vztahů (kladný směr viz obr. 2.3):

$$F_s = A_s \cdot \sigma_s = A_s \cdot \varepsilon_s \cdot E_s\,, \tag{2.17a}$$

$$F_s' = A_s' \cdot \sigma_s' = A_s' \cdot \varepsilon_s' \cdot E_s\,, \tag{2.17b}$$

$$F_c' = \frac{1}{2} b \cdot x \cdot \sigma_c' = \frac{1}{2} b \cdot x \cdot \varepsilon_c' \cdot E_{cm}\,, \tag{2.17c}$$

kde F_s je osová síla v tahové výztuži,
F_s' je osová síla v tlakové výztuži,
F_c' je síla v těžišti obrazce napětí v betonu v tlačené části průřezu.

Sestavíme součtovou podmínku rovnováhy ve směru působení sil F_s, F_s', F_c'

$$F_c' + F_s' + F_s = 0\,, \tag{2.18a}$$

dosadíme výrazy (2.17a, b, c)

$$\frac{1}{2} b \cdot x \cdot \varepsilon_c' \cdot E_{cm} + A_s' \cdot \varepsilon_s' \cdot E_s + A_s \cdot \varepsilon_s \cdot E_s = 0 \tag{2.18b}$$

a dále vztahy (2.16a, b)

$$\frac{1}{2} b \cdot x \cdot \varepsilon_c' \cdot E_{cm} + A_s' \cdot \left(\varepsilon_c' \cdot \frac{x - d'}{x} \right) \cdot E_s + A_s \cdot \left(-\varepsilon_c' \cdot \frac{d - x}{x} \right) \cdot E_s = 0\,. \tag{2.18c}$$

Vztah (2.18c) vynásobíme výrazem $((2 \cdot x) / (\varepsilon_c' \cdot E_{cm} \cdot b))$, dostaneme

$$x^2 + \frac{2}{b} \cdot A_s' \cdot (x - d') \cdot \frac{E_s}{E_{cm}} - \frac{2}{b} \cdot A_s \cdot (d - x) \cdot \frac{E_s}{E_{cm}} = 0\,. \tag{2.18d}$$

Dosadíme výraz (2.7) a provedeme formální úpravy

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2}{b} \cdot A_s' \cdot (x - d') \cdot \alpha_e - \frac{2}{b} \cdot A_s \cdot (d - x) \cdot \alpha_e = 0 \\ x^2 + \frac{2 \cdot \alpha_e \cdot A_s' \cdot x}{b} - \frac{2 \cdot \alpha_e \cdot A_s' \cdot d'}{b} - \frac{2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot d}{b} + \frac{2 \cdot \alpha_e \cdot A_s \cdot x}{b} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.18e}$$

Dalšími úpravami výrazu (2.18e) dostaneme výslednou kvadratickou rovnici (2.19)

$$x^2 + \frac{2 \cdot \alpha_e}{b} \cdot x \cdot (A_s + A_s') - \frac{2 \cdot \alpha_e}{b} \cdot (A_s \cdot d + A_s' \cdot d') = 0\,, \tag{2.19}$$

jejímž řešením lze určit výšku tlačené oblasti betonu x

$$\begin{aligned} x &= \frac{-\frac{2 \cdot \alpha_e}{b} \cdot (A_s + A_s') + \sqrt{4 \cdot \left[\frac{\alpha_e}{b} \cdot (A_s + A_s') \right]^2 + 4 \cdot \frac{2 \cdot \alpha_e}{b} \cdot (A_s \cdot d + A_s' \cdot d')}}{2} \\ x &= -\frac{\alpha_e}{b} \cdot (A_s + A_s') + \sqrt{\left[\frac{\alpha_e}{b} \cdot (A_s + A_s') \right]^2 + \frac{2 \cdot \alpha_e}{b} \cdot (A_s \cdot d + A_s' \cdot d')} \\ x &= \frac{\alpha_e}{b} \cdot (A_s + A_s') \cdot \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b}{\alpha_e} \cdot \frac{A_s \cdot d + A_s' \cdot d'}{(A_s + A_s')^2}} \right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Moment setrvačnosti průřezu s trhlinou a tlačenou částí určíme za předpokladu, že vzdálenost těžiště ideálního průřezu od nejvíce tlačeného okraje průřezu a_{gi} je rovna vzdálenosti x, stanovené pomocí vztahu (2.20).

$$I_{ir} = I_{cc} + A_{cc} \cdot \left(a_{gi} - a_{gcc}\right)^2 + \alpha_e \cdot \left[A_s \cdot \left(d - a_{gi}\right)^2 + A_s' \cdot \left(a_{gi} - d'\right)^2\right]$$

$$I_{ir} = \frac{1}{12} b \cdot x^3 + b \cdot x \cdot \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 + \alpha_e \cdot \left[A_s \cdot \left(d - x\right)^2 + A_s' \cdot \left(x - d'\right)^2\right] \qquad (2.21)$$

$$I_{ir} = \frac{1}{3} b \cdot x^3 + \alpha_e \cdot \left[A_s \cdot \left(d - x\right)^2 + A_s' \cdot \left(x - d'\right)^2\right].$$

Ve vztahu (2.21) jsou stejně jako ve vztahu (2.11) zanedbány momenty setrvačnosti tlakové i tahové výztuže k jejich těžištím.

Napětí v tahové a tlakové výztuži a napětí v betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu určíme ze vztahů (2.22a, b, c).

$$\sigma_s = \alpha_e \cdot \frac{M_{kd} \cdot \left(d - x\right)}{I_{ir}}, \qquad (2.22a)$$

$$\sigma_s' = -\alpha_e \cdot \frac{M_{kd} \cdot \left(x - d'\right)}{I_{ir}}, \qquad (2.22b)$$

$$\sigma_c' = -\frac{M_{kd} \cdot x}{I_{ir}}, \qquad (2.22c)$$

kde σ_s je napětí v tahové výztuži,
σ_s' je napětí v tlakové výztuži,
σ_c' je tlakové napětí v betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu.

2.3 Úprava vztahů

Pro úpravu výše popsaných vztahů zavedeme poměrné veličiny λ, δ, ξ

$$\lambda = \frac{h_{c,eff}}{h}, \quad \delta = \frac{d}{h}, \quad \xi = \frac{x}{h}, \qquad (2.23a, b, c)$$

kde λ je poměrná výška účinné plochy taženého betonu,
δ je poměrná účinná výška průřezu,
ξ je poměrná vzdálenost neutrální osy od nejvíce tlačeného okraje.

Kombinací vztahů (2.5), (2.23a, b, c) dostaneme výraz (2.24), který pro možnost snazšího odvolávání v textu rozepíšeme do vztahů (2.24a, b, c)

$$\lambda = \min\left\{2{,}5 \cdot \left(1 - \delta\right); \frac{1 - \xi}{3}; \frac{1}{2}\right\}, \qquad (2.24)$$

$$\lambda = 2{,}5 \cdot \left(1 - \delta\right), \qquad \lambda = \frac{1 - \xi}{3}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}. \qquad (2.24a, b, c)$$

Stupeň vyztužení průřezu tahovou výztuží ρ_s se určí ze vztahu (2.25)

$$\rho_s = \frac{A_s}{b \cdot h} \qquad \rightarrow \qquad A_s = \rho_s \cdot b \cdot h, \qquad (2.25)$$

který společně s výrazy (2.4) a (2.23a) dosadíme do vztahu (2.3)

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}} = \frac{A_s}{b \cdot h_{c,eff}} = \frac{A_s}{b \cdot h} \cdot \frac{h}{h_{c,eff}} = \frac{A_s}{b \cdot h} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho_s}{\lambda}. \qquad (2.26)$$

Do vztahu (2.19) dosadíme výraz (2.8) a celý vztah vydělíme (h^2)

$$\frac{x^2}{h^2}+2\cdot\alpha_e\cdot\frac{x}{h}\cdot\frac{\left(A_s+\beta\cdot A_s\right)}{b\cdot h}-2\cdot\alpha_e\cdot\frac{\left(A_s\cdot d+\beta\cdot A_s\cdot d'\right)}{b\cdot h^2}=0$$
$$\frac{x^2}{h^2}+2\cdot\alpha_e\cdot\frac{x}{h}\cdot\frac{A_s}{b\cdot h}\cdot\left(1+\beta\right)-2\cdot\alpha_e\cdot\frac{A_s}{b\cdot h}\cdot\frac{d+\beta\cdot d'}{h}=0. \qquad (2.27a)$$

Dále dosadíme výrazy (2.23b, c) a (2.25)

$$\xi^2+2\cdot\alpha_e\cdot\xi\cdot\rho_s\cdot\left(1+\beta\right)-2\cdot\alpha_e\cdot\rho_s\cdot\left(\delta+\beta\cdot\delta'\right)=0. \qquad (2.27b)$$

Vyjádříme ρ_s ze vztahu (2.27b)

$$\rho_s=\frac{\xi^2}{2\cdot\alpha_e\cdot\left[\delta+\beta\cdot\delta'-\xi\cdot\left(1+\beta\right)\right]}. \qquad (2.27c)$$

Zavedeme proměnnou ν, definovanou jako

$$\nu=\frac{M_{kd}}{M_{cr,0}}=\frac{M_{kd}}{k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot\frac{b\cdot h^2}{6}}\qquad\rightarrow\qquad M_{kd}=\nu\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot\frac{b\cdot h^2}{6}. \qquad (2.28)$$

Do vztahu (2.22a) pro výpočet napětí σ_s v tahové výztuži v průřezu porušeném trhlinou dosadíme výraz (2.21) a dále vztahy (2.8) a (2.28), provedeme formální úpravy

$$\sigma_s=\frac{\alpha_e\cdot M_{kd}\cdot\left(d-x\right)}{\frac{1}{3}b\cdot x^3+\alpha_e\cdot\left[A_s\cdot\left(d-x\right)^2+A_s'\cdot\left(x-d'\right)^2\right]}$$
$$\sigma_s=\frac{\alpha_e\cdot\nu\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot\frac{b\cdot h^2}{6}\cdot\left(d-x\right)}{\frac{1}{3}b\cdot x^3+\alpha_e\cdot\left[A_s\cdot\left(d-x\right)^2+\beta\cdot A_s\cdot\left(x-d'\right)^2\right]}$$
$$\sigma_s=\frac{\alpha_e\cdot\nu\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot b\cdot h^3\cdot\left(\frac{d}{h}-\frac{x}{h}\right)}{2\cdot b\cdot x^3+6\cdot\alpha_e\cdot\left[A_s\cdot\left(d-x\right)^2+\beta\cdot A_s\cdot\left(x-d'\right)^2\right]} \qquad (2.29a)$$
$$\sigma_s=\frac{\alpha_e\cdot\nu\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot\left(\frac{d}{h}-\frac{x}{h}\right)}{2\cdot\left\{\frac{b\cdot x^3}{b\cdot h^3}+3\cdot\alpha_e\cdot\frac{A_s}{b\cdot h}\cdot\left[\frac{\left(d-x\right)^2}{h^2}+\beta\cdot\frac{\left(x-d'\right)^2}{h^2}\right]\right\}}.$$

Dále dosadíme výrazy (2.23b, c) a (2.25)

$$\sigma_s=\frac{\alpha_e\cdot\nu\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}\cdot\left(\delta-\xi\right)}{2\cdot\left\{\xi^3+3\cdot\alpha_e\cdot\rho_s\cdot\left[\left(\delta-\xi\right)^2+\beta\cdot\left(\xi-\delta'\right)^2\right]\right\}}. \qquad (2.29b)$$

Zavedeme proměnnou p, definovanou jako

$$p=\frac{\sigma_s}{k_t\cdot f_{ct,eff}}\qquad\rightarrow\qquad\sigma_s=p\cdot k_t\cdot f_{ct,eff}. \qquad (2.30)$$

Do vztahu (2.30) dosadíme výraz (2.29b) a po formálních úpravách také výraz (2.27c)

$$p = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{2 \cdot \left\{ \xi^3 + 3 \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \cdot \left[(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2 \right] \right\}}$$

$$2 \cdot p \cdot \left\{ \xi^3 + 3 \cdot \alpha_e \cdot \rho_s \cdot \left[(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2 \right] \right\} = \alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)$$

$$2 \cdot p \cdot \left\{ \xi^3 + 3 \cdot \alpha_e \cdot \frac{\xi^2 \cdot \left[(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2 \right]}{2 \cdot \alpha_e \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta) \right]} \right\} = \alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi) \qquad (2.31a)$$

$$2 \cdot p \cdot \xi^3 + \frac{3 \cdot p \cdot \xi^2 \cdot \left[(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2 \right]}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} = \alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)$$

$$\frac{3 \cdot p \cdot \xi^2 \cdot \left[(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2 \right]}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} = \alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi) - 2 \cdot p \cdot \xi^3 ,$$

provedeme další formální úpravy

$$\frac{3 \cdot p \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi) - 2 \cdot p \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2}$$

$$\frac{3 \cdot p \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} - \frac{2 \cdot p \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} \qquad (2.31b)$$

$$\frac{3 \cdot p \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} + \frac{2 \cdot p \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} ,$$

a dostaneme výsledný výraz (2.31c)

$$p \cdot \left[\frac{3 \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} + \frac{2 \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} \right] = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} . \qquad (2.31c)$$

2.4 Postup výpočtu

a) Výpočet při vzdálenosti výztuže $s \le 5 \cdot (c + \phi/2)$

• rozdíl poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$) dle vztahu (2.6a)

Do vztahu (2.1) pro výpočet šířky trhliny dosadíme výraz (2.2a) pro stanovení maximální vzdálenosti trhlin $s_{r,max}$, platí pro případ $s \le 5 \cdot (c + \phi/2)$, a dále výraz (2.6a) pro výpočet rozdílu poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$).

$$w_k = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \right) \cdot \frac{\sigma_s - k_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff}\right)}{E_s}, \tag{2.32a}$$

dosadíme výraz (2.26)

$$w_k = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot \frac{\sigma_s - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right)}{E_s}. \tag{2.32b}$$

Zavedeme proměnnou $w_{k,0}$, definovanou jako

$$w_{k,0} = \frac{E_s \cdot w_k}{k_t \cdot f_{ct,eff}} \qquad \rightarrow \qquad w_k = \frac{w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s}. \tag{2.33}$$

Výrazy (2.30) a (2.33) dosadíme do vztahu (2.32b), provedeme formální úpravy

$$\frac{w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s} = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot \frac{p \cdot k_t \cdot f_{ct,eff} - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right)}{E_s}$$

$$w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff} = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot \left[p \cdot k_t \cdot f_{ct,eff} - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right) \right]$$

$$w_{k,0} = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot \left[p - \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right) \right] \tag{2.34a}$$

$$w_{k,0} = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot \left(p - \frac{\lambda}{\rho_s} - \alpha_e \right),$$

ze vztahu (2.34a) vyjádříme proměnnou p

$$p = \frac{w_{k,0}}{k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda} + \frac{\lambda}{\rho_s} + \alpha_e, \tag{2.34b}$$

a dosadíme výraz (2.27c)

$$p = \frac{w_{k,0} \cdot \xi^2}{k_3 \cdot c \cdot \xi^2 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \phi \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)\right]} + \tag{2.34c}$$

$$+ \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e}{\xi^2} \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)\right] + \alpha_e.$$

Dosazením výrazu (2.34c) do (2.31c) dostaneme výslednou rovnici (2.35) pro výpočet neznámé ξ (poměrná výška tlačené části průřezu porušeného trhlinou).

$$\left\{\frac{w_{k,0}\cdot\xi^2}{k_3\cdot c\cdot\xi^2+k_1\cdot k_2\cdot k_4\cdot\phi\cdot\lambda\cdot 2\cdot\alpha_e\cdot\left[\delta+\beta\cdot\delta'-\xi\cdot(1+\beta)\right]}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda\cdot 2\cdot\alpha_e}{\xi^2}\cdot\left[\delta+\beta\cdot\delta'-\xi\cdot(1+\beta)\right]+\alpha_e\right\}\cdot \qquad (2.35)$$
$$\cdot\left[\frac{3\cdot\xi^2}{\delta+\beta\cdot\delta'-\xi\cdot(1+\beta)}+\frac{2\cdot\xi^3}{(\delta-\xi)^2+\beta\cdot(\xi-\delta')^2}\right]=\frac{\alpha_e\cdot\nu\cdot(\delta-\xi)}{(\delta-\xi)^2+\beta\cdot(\xi-\delta')^2}.$$

V rovnici (2.35) se kromě neznámé ξ vyskytuje také proměnná λ, která může být na neznámé ξ závislá – viz vztah (2.24).

V prvním kroku dosadíme za proměnnou λ výraz (2.24b), numerickým řešením rovnice (2.35) určíme neznámou ξ a ověříme podmínku (2.36)

$$\frac{1-\xi}{3}\le 2{,}5\cdot(1-\delta)\quad\wedge\quad\frac{1-\xi}{3}\le\frac{1}{2}. \qquad (2.36)$$

Pokud je podmínka (2.36) splněna, byl předpoklad (2.24b) správný a výpočet neznámé ξ není nutné opakovat.

Pokud podmínka (2.36) splněna není, dosadíme za proměnnou λ menší z hodnot určených pomocí vztahů (2.24a), (2.24c) a provedeme opakované řešení rovnice (2.35).

Známe-li hodnotu ξ, můžeme pomocí vztahu (2.27c) určit stupeň vyztužení ρ_s a s využitím vztahu (2.29b) odpovídající napětí v tahové výztuži σ_s.

Při odvození vztahů pro výpočet proměnné ξ, jsme uvažovali rozdíl poměrných přetvoření $(\varepsilon_{sm}-\varepsilon_{cm})$ podle vztahu (2.6a). Musíme tedy ověřit podmínku (2.37)

$$\frac{\sigma_s-k_t\cdot\frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}}\cdot\left(1+\alpha_e\cdot\rho_{p,eff}\right)}{E_s}\ge 0{,}6\cdot\frac{\sigma_s}{E_s}, \qquad (2.37)$$

kde $\rho_{p,eff}$ určíme podle (2.26).

Pokud je podmínka (2.37) splněna, byl předpoklad (2.6a) správný a výpočet ξ není nutné opakovat.

Minimální plochu tahové výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin w_k určíme pomocí vztahu (2.25). Odpovídající plocha tlakové výztuže je dána vztahem (2.8).

Pokud podmínka (2.37) splněna není, musí se celý výpočet neznámé ξ opakovat, a to s využitím níže odvozených vztahů.

• rozdíl poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$) dle vztahu (2.6b)

Do vztahu (2.1) pro výpočet šířky trhliny dosadíme výraz (2.2a) pro stanovení maximální vzdálenosti trhlin $s_{r,max}$, platí pro případ $s \le 5 \cdot (c + \phi / 2)$, a dále výraz (2.6b) pro výpočet rozdílu poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$).

$$w_k = \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_{p,eff}} \right) \cdot 0{,}6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}, \tag{2.38a}$$

dosadíme výrazy (2.26), (2.30) a (2.33), provedeme formální úpravy

$$\begin{aligned} w_k &= \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot 0{,}6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \\ \frac{w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s} &= \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot 0{,}6 \cdot \frac{p \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s} \\ w_{k,0} &= \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right) \cdot 0{,}6 \cdot p \,, \end{aligned} \tag{2.38b}$$

ze vztahu (2.38b) vyjádříme proměnnou p a dosadíme výraz (2.27c)

$$\begin{aligned} p &= \frac{w_{k,0}}{0{,}6 \cdot \left(k_3 \cdot c + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \frac{\phi}{\rho_s} \cdot \lambda \right)} \\ p &= \frac{w_{k,0} \cdot \xi^2}{0{,}6 \cdot \left\{ k_3 \cdot c \cdot \xi^2 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \phi \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta) \right] \right\}}. \end{aligned} \tag{2.38c}$$

Dosazením výrazu (2.38c) do (2.31c) dostaneme výslednou rovnici (2.39) pro výpočet neznámé ξ (poměrná výška tlačené části průřezu porušeného trhlinou).

$$\left\{ \frac{w_{k,0} \cdot \xi^2}{0{,}6 \cdot \left\{ k_3 \cdot c \cdot \xi^2 + k_1 \cdot k_2 \cdot k_4 \cdot \phi \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta) \right] \right\}} \right\} \cdot \left[\frac{3 \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} + \frac{2 \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} \right] = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2}. \tag{2.39}$$

V rovnici (2.39) se stejně jako v předchozím případě (rovnice (3.35)) vyskytuje kromě neznámé ξ také proměnná λ, která může být na neznámé ξ závislá – viz vztah (2.24).

V prvním kroku dosadíme za proměnnou λ výraz (2.24b), numerickým řešením rovnice (2.39) určíme neznámou ξ a ověříme podmínku (2.36)

Pokud je podmínka (2.36) splněna, byl předpoklad (2.24b) správný a výpočet neznámé ξ není nutné opakovat.

Pokud podmínka (2.36) splněna není, dosadíme za proměnnou λ menší z hodnot určených pomocí vztahů (2.24a), (2.24c) a provedeme opakované řešení rovnice (2.39).

Známe-li hodnotu ξ, můžeme pomocí vztahu (2.27c) určit stupeň vyztužení ρ_s a s využitím vztahu (2.29b) odpovídající napětí v tahové výztuži σ_s.

Minimální plochu tahové výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin w_k určíme pomocí vztahu (2.25). Odpovídající plocha tlakové výztuže je dána vztahem (2.8).

b) Výpočet při vzdálenosti výztuže $s > 5 \cdot (c + \phi/2)$

• rozdíl poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$) dle vztahu (2.6a)

Do vztahu (2.1) pro výpočet šířky trhliny dosadíme výraz (2.2b) pro stanovení maximální vzdálenosti trhlin $s_{r,max}$, platí pro případ $s > 5 \cdot (c + \phi/2)$, a dále výraz (2.6a) pro výpočet rozdílu poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$).

$$w_k = 1{,}3 \cdot (h - x) \cdot \frac{\sigma_s - k_t \cdot \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} \cdot (1 + \alpha_e \cdot \rho_{p,eff})}{E_s}, \tag{2.40a}$$

dosadíme výrazy (2.23c), (2.26), (2.30) a (2.33), provedeme formální úpravy

$$w_k = 1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot \frac{\sigma_s - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right)}{E_s}$$

$$\frac{w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s} = 1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot \frac{p \cdot k_t \cdot f_{ct,eff} - k_t \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right)}{E_s} \tag{2.40b}$$

$$w_{k,0} = 1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot \left[p - \frac{\lambda}{\rho_s} \cdot \left(1 + \alpha_e \cdot \frac{\rho_s}{\lambda}\right)\right]$$

$$w_{k,0} = 1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot \left(p - \frac{\lambda}{\rho_s} - \alpha_e\right),$$

ze vztahu (2.40b) vyjádříme proměnnou p a dosadíme výraz (2.27c)

$$p = \frac{w_{k,0}}{1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi)} + \frac{\lambda}{\rho_s} + \alpha_e$$

$$p = \frac{w_{k,0}}{1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi)} + \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e}{\xi^2} \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)\right] + \alpha_e . \tag{2.40c}$$

Dosazením výrazu (2.40c) do (2.31c) dostaneme výslednou rovnici (2.41) pro výpočet neznámé ξ (poměrná výška tlačené části průřezu porušeného trhlinou).

$$\left\{\frac{w_{k,0}}{1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi)} + \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \alpha_e}{\xi^2} \cdot \left[\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)\right] + \alpha_e\right\} \cdot \left[\frac{3 \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} + \frac{2 \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2}\right] = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} \cdot \tag{2.41}$$

V rovnici (2.41) se stejně jako v předchozích případech vyskytuje kromě neznámé ξ také proměnná λ, která může být na neznámé ξ závislá – viz vztah (2.24).

V prvním kroku dosadíme za proměnnou λ výraz (2.24b), numerickým řešením rovnice (2.41) určíme neznámou ξ a ověříme podmínku (2.36)

Pokud je podmínka (2.36) splněna, byl předpoklad (2.24b) správný a výpočet neznámé ξ není nutné opakovat.

Pokud podmínka (2.36) splněna není, dosadíme za proměnnou λ menší z hodnot určených pomocí vztahů (2.24a), (2.24c) a provedeme opakované řešení rovnice (2.41).

Známe-li hodnotu ξ, můžeme pomocí vztahu (2.27c) určit stupeň vyztužení ρ_s a s využitím vztahu (2.29b) odpovídající napětí v tahové výztuži σ_s.

Při odvození vztahů pro výpočet proměnné ξ, jsme uvažovali rozdíl poměrných přetvoření $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$ podle vztahu (2.6a). Musíme tedy ověřit podmínku (2.37)

Pokud je podmínka (2.37) splněna, byl předpoklad (2.6a) správný a výpočet ξ není nutné opakovat.

Minimální plochu tahové výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin w_k určíme pomocí vztahu (2.25). Odpovídající plocha tlakové výztuže je dána vztahem (2.8).

Pokud podmínka (2.37) splněna není, musí se celý výpočet neznámé ξ opakovat, a to s využitím níže odvozených vztahů.

• rozdíl poměrných přetvoření ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$) dle vztahu (2.6b)

Do vztahu (2.1) pro výpočet šířky trhliny dosadíme výraz (2.2b) pro stanovení maximální vzdálenosti trhlin $s_{r,max}$, platí pro případ $s > 5 \cdot (c + \phi / 2)$, a dále výraz (2.6b) pro výpočet rozdílu poměrných přetvoření $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$.

$$w_k = 1{,}3 \cdot (h - x) \cdot 0{,}6 \cdot \frac{\sigma_s}{E_s}, \tag{2.42a}$$

dosadíme výrazy (2.23c), (2.30) a (2.33), provedeme formální úpravy

$$\frac{w_{k,0} \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s} = 1{,}3 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot 0{,}6 \cdot \frac{p \cdot k_t \cdot f_{ct,eff}}{E_s}$$
$$w_{k,0} = 0{,}78 \cdot h \cdot (1 - \xi) \cdot p \tag{2.42b}$$

ze vztahu (2.42b) vyjádříme proměnnou p

$$p = \frac{w_{k,0}}{0{,}78 \cdot h \cdot (1 - \xi)} \tag{2.42c}$$

Dosazením výrazu (2.42c) do (2.31c) dostaneme výslednou rovnici (2.43) pro výpočet neznámé ξ (poměrná výška tlačené části průřezu porušeného trhlinou).

$$\frac{w_{k,0}}{0{,}78 \cdot h \cdot (1 - \xi)} \cdot \left[\frac{3 \cdot \xi^2}{\delta + \beta \cdot \delta' - \xi \cdot (1 + \beta)} + \frac{2 \cdot \xi^3}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2} \right] = \frac{\alpha_e \cdot \nu \cdot (\delta - \xi)}{(\delta - \xi)^2 + \beta \cdot (\xi - \delta')^2}. \tag{2.43}$$

Známe-li hodnotu ξ, můžeme pomocí vztahu (2.27c) určit stupeň vyztužení ρ_s a s využitím vztahu (2.29b) odpovídající napětí v tahové výztuži σ_s.

Minimální plochu tahové výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin w_k určíme pomocí vztahu (2.25). Odpovídající plocha tlakové výztuže je dána vztahem (2.8).

3 Popis programu

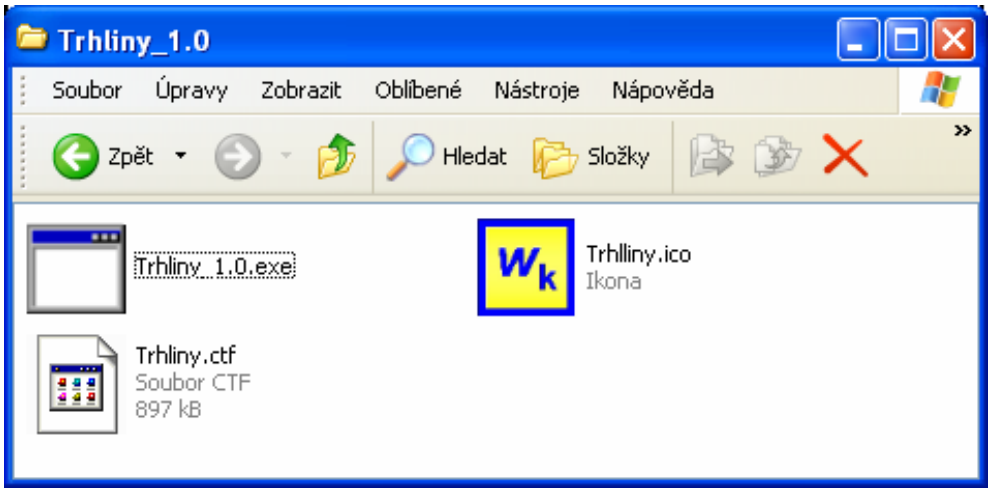
3.1 Instalace, spuštění programu

Pro spuštění programu je nezbytné nejprve nainstalovat **MATLAB Component Runtime 7.6**. Instalace tohoto doplňku se provede pomocí aplikace **MCRInstaller.exe**.

Vlastní **Výpočetní program pro návrh výztuže při předepsané šířce trhlin** (dále jen **Program**) není nutné instalovat, ke spuštění slouží soubor **Trhliny_1.0.exe** umístěný ve složce **Trhliny_1.0**. V této složce musí být společně se souborem **Trhliny_1.0.exe** umístěn soubor **Trhliny.ctf** (viz obr. 3.1).

Pro jednoduché spouštění programu je vhodné vytvořit zástupce souboru **Trhliny_1.0.exe** a umístit jej například na pracovní plochu počítače. Spouštění programu lze poté provádět jednoduše pomocí tohoto zástupce (bez nutnosti otevírat složku **Trhliny_1.0**), kterému je vhodné pro snazší orientaci přiřadit k tomuto účelu vytvořenou ikonu (soubor **Trhliny.ico** umístěný ve složce **Trhliny_1.0**).

Aplikaci **MCRInstaller.exe**, složku **Trhliny_1.0** (obsahující soubory **Trhliny_1.0.exe**, **Trhliny.ctf** a **Trhliny.ico**) a tuto uživatelskou příručku lze volně stáhnout z webových stránek: <http://concrete.fsv.cvut.cz/~stefan/vyzkum.htm>.



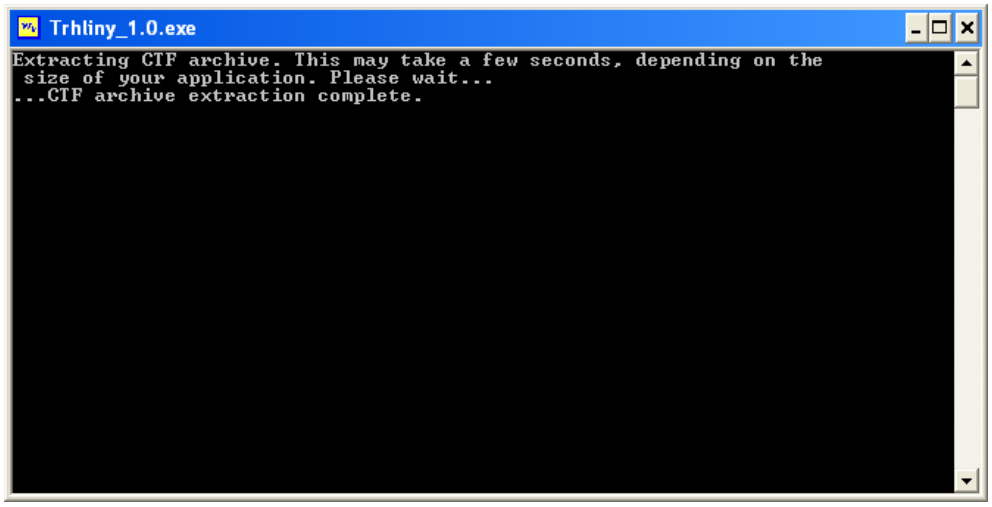
Obr. 3.1 Složka **Trhliny_1.0**

Po prvním spuštění programu (pomocí souboru **Trhliny_1.0.exe** nebo jeho zástupce) se na několik vteřin objeví černé okno s textem (viz obr. 3.2):

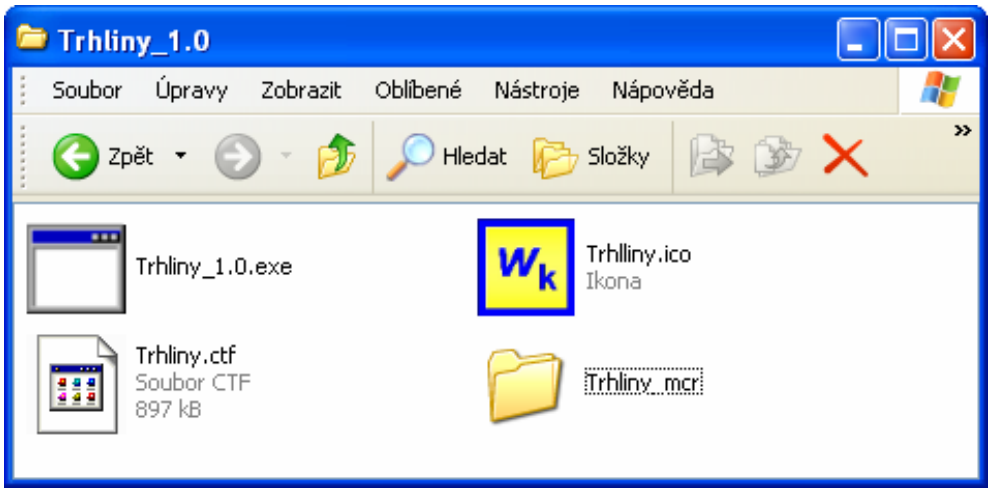
Extracting CTF archive. This may take a few seconds, depending on the size of your application. Please wait…

…CTF archive extraction complete.

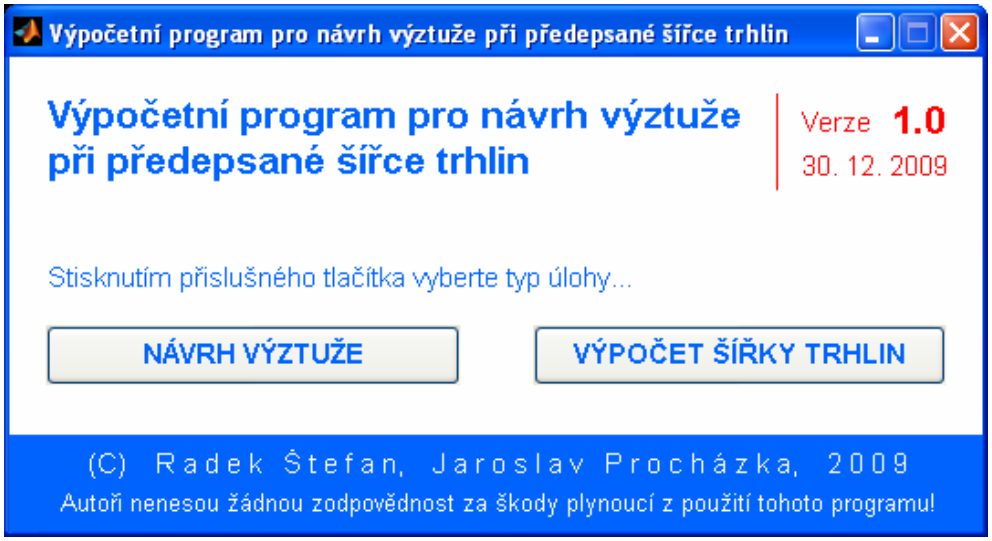
Poté se ve složce **Trhliny_1.0** automaticky vytvoří nová složka **Trhliny _mcr** (obr. 3.3) a spustí se úvodní okno **Programu** (obr 3.4). Při každém dalším spuštění **Programu** (pokud uživatel nevymaže složku **Trhliny _mcr**) již k extrahování CTF archivu nedochází (objeví se černé okno bez textu a poté dojde ke spuštění vlastního **Programu**).



Obr. 3.2 Okno s hlášením o extrahování CTF archivu



Obr. 3.3 Složka **Trhliny_1.0** s nově vytvořenou složkou **Trhliny _mcr**

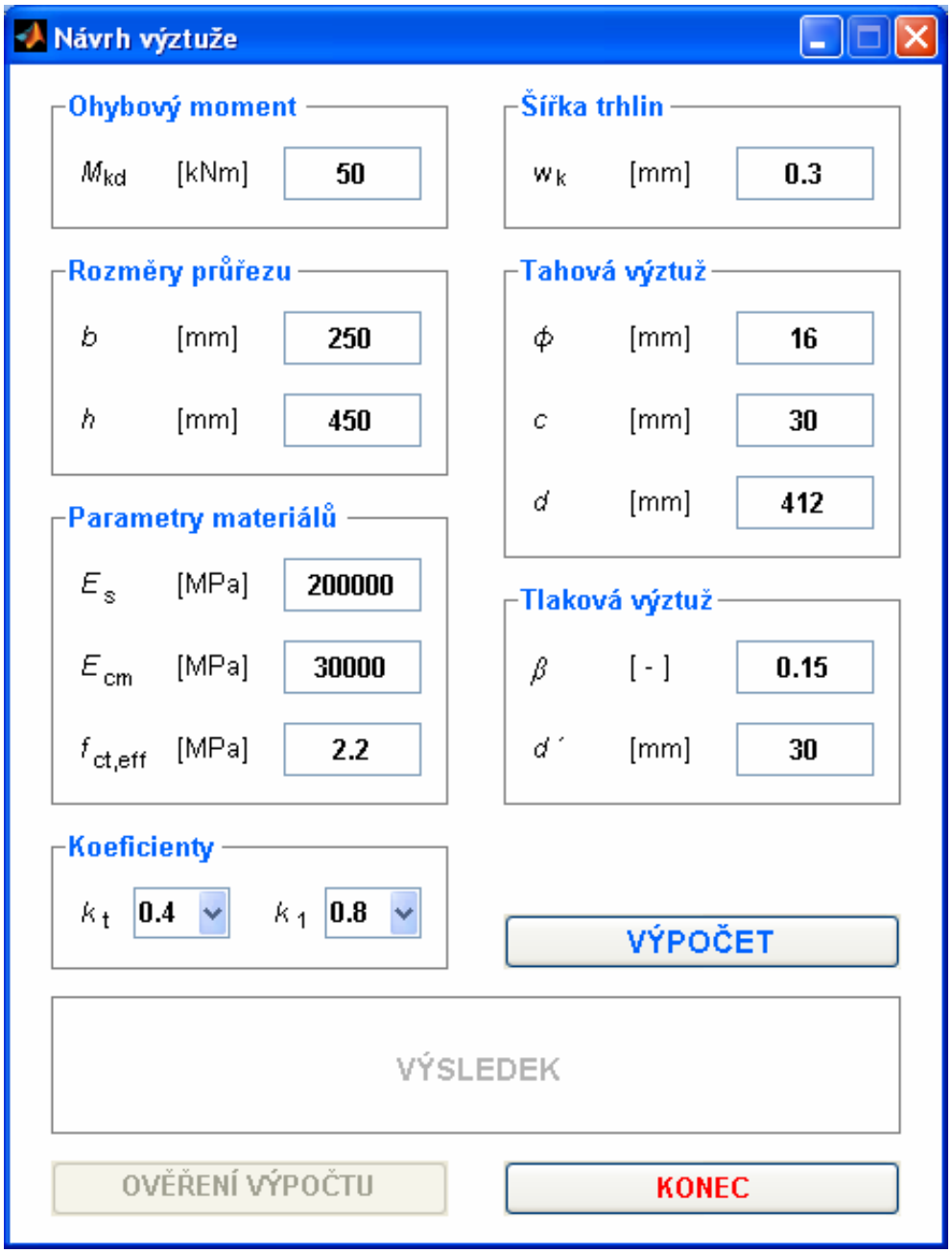


Obr. 3.4 Úvodní okno **Programu**

V úvodním okně **Programu** (obr. 3.4) je možné zvolit mezi dvěma typy úloh. Jednak lze provést **Návrh výztuže** při předepsané šířce trhlin, jednak je možné přejít na **Výpočet šířky trhlin** pro zadané vstupní parametry průřezu (rozměry, materiály, vyztužení) a zatížení.

3.2 Návrh výztuže

Po stisknutí tlačítka **Návrh výztuže** v úvodním okně **Programu** (obr. 3.4) se objeví dialogové okno uvedené na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Dialogové okno **Návrh výztuže**

Přehled všech vstupních parametrů viz tab. 3.1 – obsahuje slovní popis jednotlivých parametrů (sloupec (1) tab. 3.1), použité značky (sloupec (2) tab. 3.1), jednotky (sloupec (3) tab. 3.1) a dále omezení pro zadání hodnot uvedených parametrů (sloupec (4) tab. 3.1).

Hodnoty součinitelů k_2, k_3 a k_4 (viz kapitola 2.1) jsou v **Programu** pevně nastaveny a uživatel je tedy nemůže sám zadávat. Uvažují se následující hodnoty:

$k_2 = 0{,}5$ (hodnota součinitele pro ohyb),
$k_3 = 3{,}4$ (doporučená hodnota),
$k_4 = 0{,}425$ (doporučená hodnota).

Tab. 3.1 Přehled vstupních parametrů pro návrh výztuže

Vstupní parametr	Značka	Jednotka	Omezení
(1)	(2)	(3)	(4)
Návrhová hodnota ohybového momentu pro příslušnou kombinaci zatížení	M_{kd}	kNm	$M_{kd} > 0$
Šířka průřezu	b	m	$b > 0$
Výška průřezu	h	m	$h > 0$
Návrhová hodnota modulu pružnosti betonářské oceli	E_s	MPa	$150 \leq E_s \leq 250$
Střední hodnota sečnového modulu pružnosti betonu ve stáří 28 dní	E_c	MPa	$5 \leq E_c \leq 50$
Průměrná hodnota pevnosti betonu v tahu v okamžiku prvního očekávaného vzniku trhlin	$f_{ct,eff}$	MPa	$0 < f_{ct,eff} \leq 10$
Součinitel závisící na době trvání zatížení	k_t		k_t = 0,6 nebo 0,4
Součinitel pro zohlednění vlastností soudržné výztuže	k_1		k_1 = 0,8 nebo 1,6
Předepsaná šířka trhlin	w_k	mm	$0 < w_k \leq 5$
Průměr prutu podélné tahové výztuže	ϕ	mm	$4 \leq \phi \leq 50$
Krycí vrstva podélné tahové výztuže	c	mm	$0 < c < h/2$
Vzdálenost těžiště plochy tahové výztuže od tlačeného okraje průřezu (účinná výška průřezu)	d	mm	$h/2 < d < h$
Koeficient vyztužení tlakovou výztuží	β		$0 \leq \beta \leq 1$
Vzdálenost těžiště plochy tlakové výztuže od tlačeného okraje průřezu	d'	mm	když $\beta > 0$: $0 < d' < h/2$

Poznámka 3. 1

V dialogových oknech **Programu** se stejně jako při odvozování vztahů v předchozích kapitolách hovoří o výztuži umístěné blíže tlačenému okraji průřezu jako o **výztuži tlakové**. Je však třeba upozornit na to, že v některých případech (pokud je zadaná hodnota d' větší než vzdálenost neutrální osy ideálního průřezu od tlačeného okraje) může být i tato **výztuž tahová**. Na správnosti výpočtu to však nic nemění – všechny vztahy odvozené v předchozích kapitolách jsou platné i v těchto případech. Skutečné hodnoty napětí, resp. sil ve výztuži (včetně znaménka: tah +, tlak –) lze určit v části **Programu** popsané v kapitole 3.3.

Pro spuštění výpočtu se použije tlačítko **Výpočet** (viz obr. 3.5). Pokud je některý z parametrů zadán chybně – tzn. zadaná hodnota neleží v předepsaných mezích, místo čísla je zadán neplatný řetězec znaků nebo je příslušné pole nevyplněné, objeví se nad tlačítkem **Výpočet** hlášení **Chybné zadání**, pole s chybně zadaným parametrem se zvýrazní červeně (viz obr. 3.6) a k vlastnímu výpočtu nedojde.

Pokud jsou všechny vstupy zadány správně, spustí se výpočet minimální plochy výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin. Postup výpočtu je uveden v kapitole 2.4.

Obr. 3.6 Zobrazení chybového hlášení v okně **Návrh výztuže**

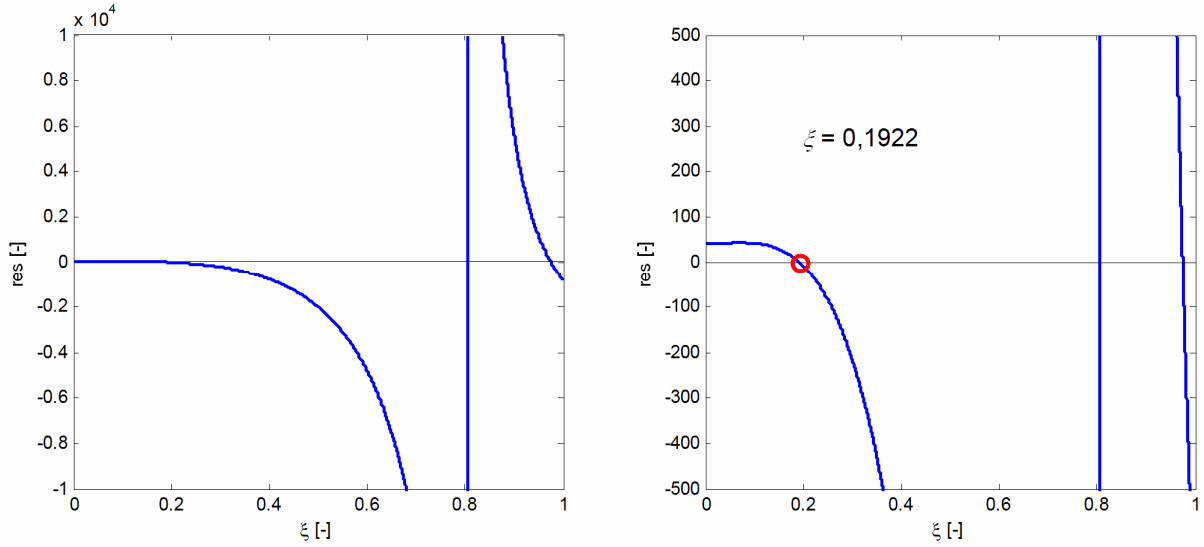
Řešení rovnic (2.35), (2.39), (2.41) a (2.43) se provádí numericky – v intervalu (0,1) se hledá hodnota ξ, pro kterou je levá strana příslušné rovnice rovna straně pravé, tedy hodnota ξ, pro kterou platí podmínka (3.1)

$$res(\xi) = P(\xi) - L(\xi) = 0\,, \tag{3.1}$$

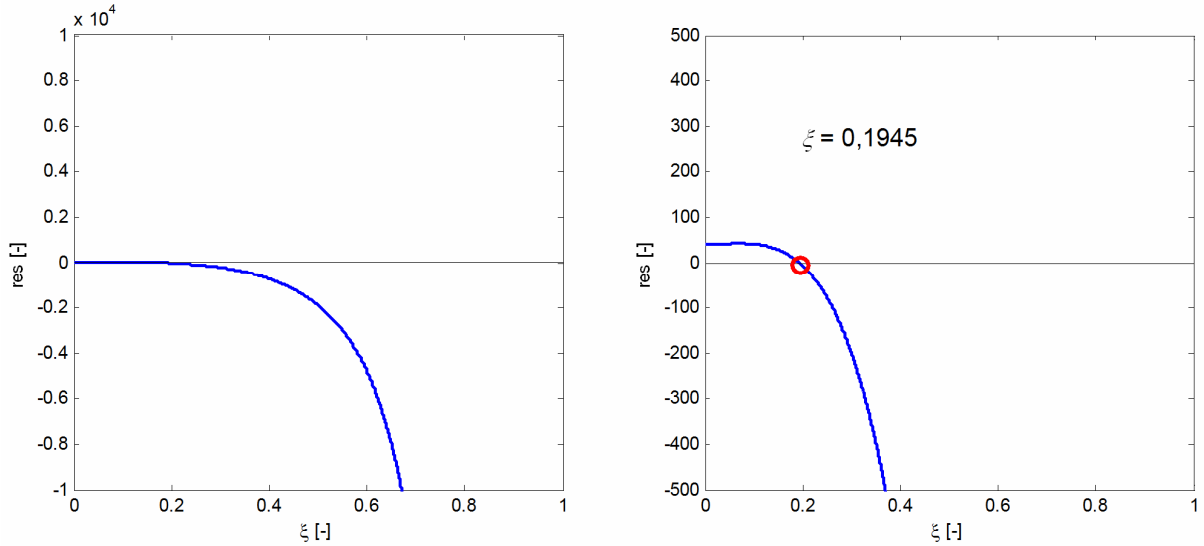
kde $res(\xi)$ je rozdíl pravé a levé strany příslušné rovnice,
$P(\xi)$ je pravá strana příslušné rovnice,
$L(\xi)$ je levá strana příslušné rovnice.

Na obr. 3.7a je uveden příklad řešení (graf závislosti $res(\xi)$) rovnice (2.35) pro parametry uvedené na obr. 3.5. Řešení rovnice (2.35) uvedené na obr. 3.7b odpovídá stejným parametrům, avšak v tomto případě není použita tlaková výztuž ($\beta = 0$).

Grafy závislosti $res(\xi)$ pro rovnice (2.39), (2.41) a (2.43) mají obdobný průběh jako v případě řešení rovnice (2.35).



Obr. 3.7a Grafické znázornění řešení rovnice (2.35) – graf závislosti *res*(ξ) pro $\beta = 0{,}15$ (ostatní parametry viz obr. 3.5)

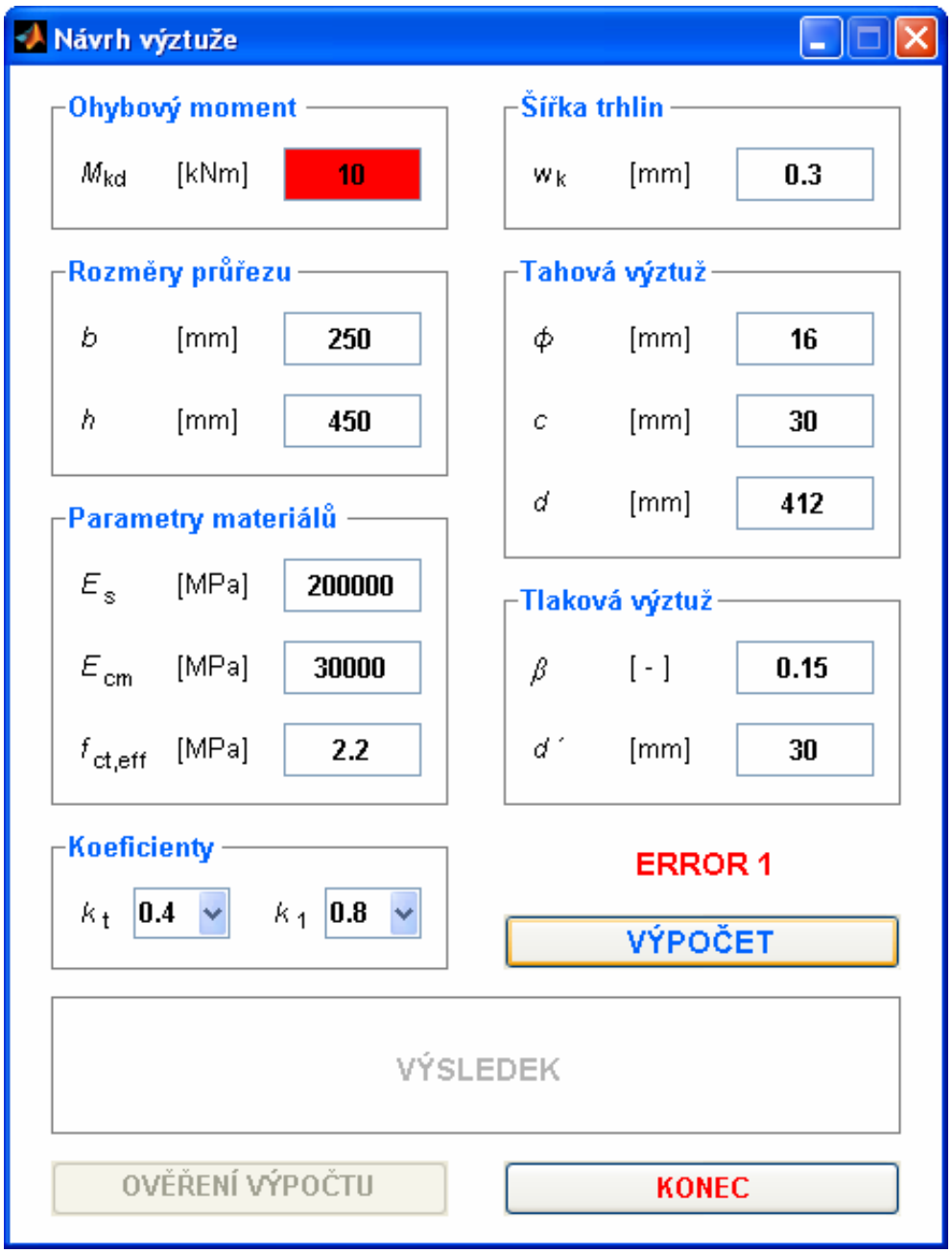


Obr. 3.7b Grafické znázornění řešení rovnice (2.35) – graf závislosti *res*(ξ) pro $\beta = 0$ (ostatní parametry viz obr. 3.5)

Zadání vstupních parametrů podle tab. 3.1 samo o sobě nezaručuje, že výpočet minimální plochy výztuže pro dodržení předepsané šířky trhlin proběhne v pořádku. Obecně může nastat jedna ze tří možných chyb.

První možnou chybou je to, že výpočet sice proběhne, avšak pro vypočítanou plochu výztuže je kritický moment M_{cr} (tedy moment při kterém dojde ke vzniku trhlin) větší nebo roven zadanému momentu od zatížení M_{kd} (tzn. není splněna podmínka (2.13b)). Pokud tato chyba nastane, objeví se nad tlačítkem **Výpočet** hlášení **ERROR 1**, pole pro zadání ohybového momentu M_{kd} se zvýrazní červeně (viz obr. 3.8) a k zobrazení výsledků nedojde.

Další dvě možné chyby souvisí s vlastním algoritmem výpočtu a vysvětlení okolností, při kterých k nim může dojít, zde nebudeme podrobně uvádět (většinou je příčinou zadání příliš malé hodnoty momentu M_{kd}). Způsob zobrazení chyb **ERROR 2** a **ERROR 3** je obdobný jako v přídě chyby **ERROR 1** (viz obr. 3.8).



Obr. 3.8 Zobrazení chybového hlášení **ERROR 1** v okně **Návrh výztuže**

Pokud jsou všechny vstupy zadány správně (podle tab. 3.1) a nenastane žádná z chyb popsaných výše, dojde po provedení výpočtu k zobrazení výsledků ve spodní části dialogového okna **Návrh výztuže** (viz obr. 3.9). Zároveň se aktivuje tlačítko **Ověření výpočtu** (viz obr. 3.9).

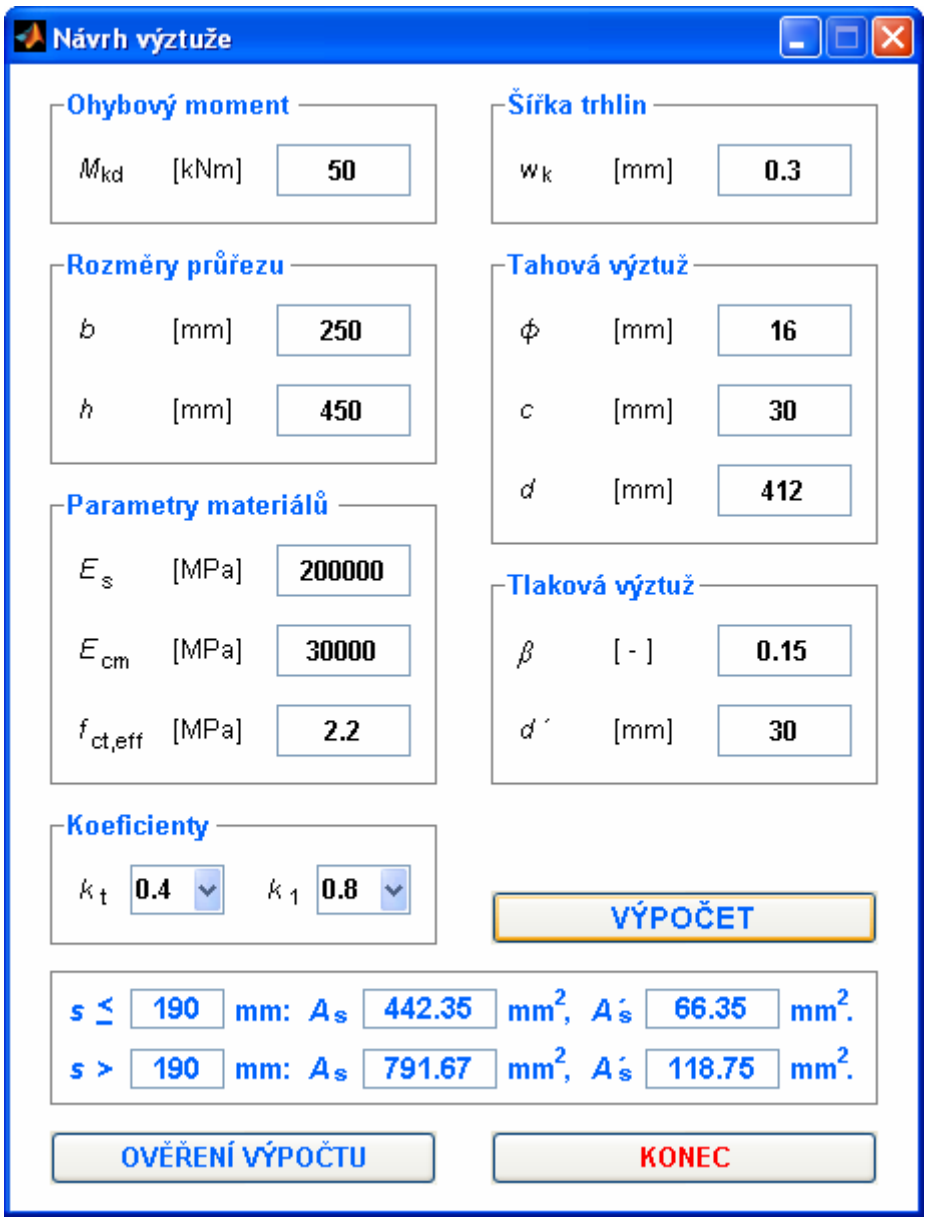
Výsledky výpočtu jsou zobrazeny ve dvou řádcích. V prvním řádku je uvedena minimální plocha tahové výztuže A_s **[mm^2]** a minimální plocha tlakové výztuže A_s' **[mm^2]** pro případ, že osová vzdálenost soudržné výztuže ***s*** **[mm]** nepřekročí hodnotu $5 \cdot (c + \phi/2)$.

V druhém řádku je uvedena minimální plocha tahové výztuže A_s **[mm^2]** a minimální plocha tlakové výztuže A_s' **[mm^2]** pro případ, že osová vzdálenost soudržné výztuže ***s*** **[mm]** překročí hodnotu $5 \cdot (c + \phi/2)$, nebo soudržná výztuž není v tažené oblasti.

Pro tlakovou výztuž platí poznámka 3.1.

Stisknutím tlačítka **Ověření výpočtu** se zobrazí okno **Výpočet šířky trhlin** (podrobný popis viz následující kapitola 3.3).

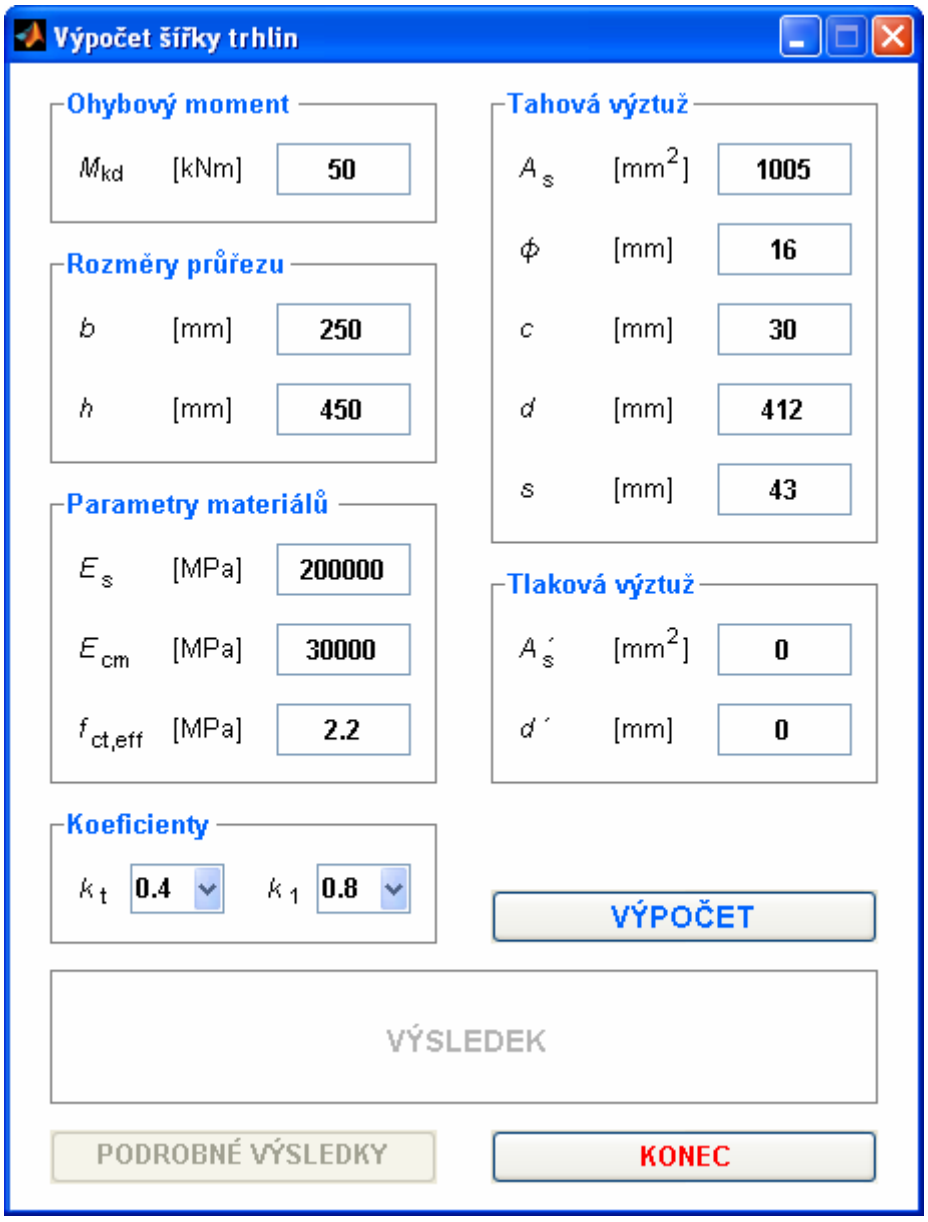
Tlačítko konec (viz obr. 3.9) slouží k uzavření všech oken **Programu**.



Obr. 3.9 Návrh výztuže – zobrazení výsledků výpočtu

3.3 Výpočet šířky trhlin

Do části **Výpočet šířky** trhlin se lze dostat dvěma způsoby. Tím prvním je stisknutí tlačítka **Výpočet šířky trhlin** v úvodním okně **Programu** (obr. 3.4). V tomto případě je jedná o samostatnou úlohu, kdy známe plochu tahové i tlakové výztuže a potřebujeme pouze určit šířku trhlin pro zadané parametry průřezu a zatížení. Po stisknutí tlačítka **Výpočet šířky trhlin** se objeví dialogové okno uvedené na obr. 3.10.



Obr. 3.10 Dialogové okno **Výpočet šířky trhlin**

Druhým způsobem, jak se dostat do části **Výpočet šířky trhlin**, je stisknutí tlačítka **Ověření výpočtu** v dialogovém okně **Návrh výztuže** (viz obr. 3.9). V tomto případě tedy část **Výpočet šířky trhlin** plní funkci kontroly návrhu požadované plochy výztuže pro dodržení předepsaní šířky trhlin. Dialogové okno, které se po stisknutí tlačítka **Ověření výpočtu** zobrazí, je stejné jako okno na obr. 3.10. Hodnoty jednotlivých vstupních parametrů jsou však v tomto případě převzaty z části **Návrh výztuže** a pole pro zadání plochy tahové výztuže A_s, plochy tlakové výztuže A_s' a osové vzdálenosti prutů s jsou prázdná. Do nich uživatel doplní hodnoty, které na základě výsledků získaných v části **Návrh výztuže** navrhne.

Přehled všech vstupních parametrů viz tab. 3.2 – obsahuje slovní popis jednotlivých parametrů (sloupec (1) tab. 3.2), použité značky (sloupec (2) tab. 3.2), jednotky (sloupec (3) tab. 3.2) a dále omezení pro zadání hodnot uvedených parametrů (sloupec (4) tab. 3.2).

Hodnoty součinitelů k_2, k_3 a k_4 viz kapitola 3.1. Pro tlakovou výztuž platí poznámka 3.1.

Tab. 3.2 Přehled vstupních parametrů pro výpočet šířky trhlin

Vstupní parametr	Značka	Jednotka	Omezení
(1)	(2)	(3)	(4)
Návrhová hodnota ohybového momentu pro příslušnou kombinaci zatížení	M_{kd}	kNm	$M_{kd} > 0$
Šířka průřezu	b	m	$b > 0$
Výška průřezu	h	m	$h > 0$
Návrhová hodnota modulu pružnosti betonářské oceli	E_s	MPa	$150 \le E_s \le 250$
Střední hodnota sečnového modulu pružnosti betonu ve stáří 28 dní	E_c	MPa	$5 \le E_c \le 50$
Průměrná hodnota pevnosti betonu v tahu v okamžiku prvního očekávaného vzniku trhlin	$f_{ct,eff}$	MPa	$0 \le f_{ct,eff} \le 10$
Součinitel závisící na době trvání zatížení	k_t		k_t = 0,6 nebo 0,4
Součinitel pro zohlednění vlastností soudržné výztuže	k_1		k_1 = 0,8 nebo 1,6
Plocha podélné tahové výztuže	A_s	mm^2	$A_s > 0$
Průměr prutu podélné tahové výztuže	ϕ	mm	$4 \le \phi \le 50$
Krycí vrstva podélné tahové výztuže	c	mm	$0 < c < h/2$
Vzdálenost těžiště plochy tahové výztuže od tlačeného okraje průřezu (účinná výška průřezu)	d	mm	$h/2 < d < h$
Osová vzdálenost soudržné výztuže	s	mm	$0 < s < b$
Plocha podélné tlakové výztuže	A_s'	mm^2	$A_s' \ge 0$
Vzdálenost těžiště plochy tlakové výztuže od tlačeného okraje průřezu	d'	mm	když $A_s' > 0$: $0 < d' < h/2$

Pro spuštění výpočtu se použije tlačítko **Výpočet** (viz obr. 3.10). Pokud je některý z parametrů zadán chybně – tzn. zadaná hodnota neleží v předepsaných mezích, místo čísla je zadán neplatný řetězec znaků nebo je příslušné pole nevyplněné, objeví se nad tlačítkem **Výpočet** hlášení **Chybné zadání**, pole s chybně zadaným parametrem se zvýrazní červeně (viz obr. 3.11) a k vlastnímu výpočtu nedojde.

Pokud jsou všechny vstupy zadány správně, spustí se výpočet šířky trhlin pro zadané parametry průřezu a zatížení. Postup výpočtu je uveden v kapitole 2.1 a kapitole 2.2.

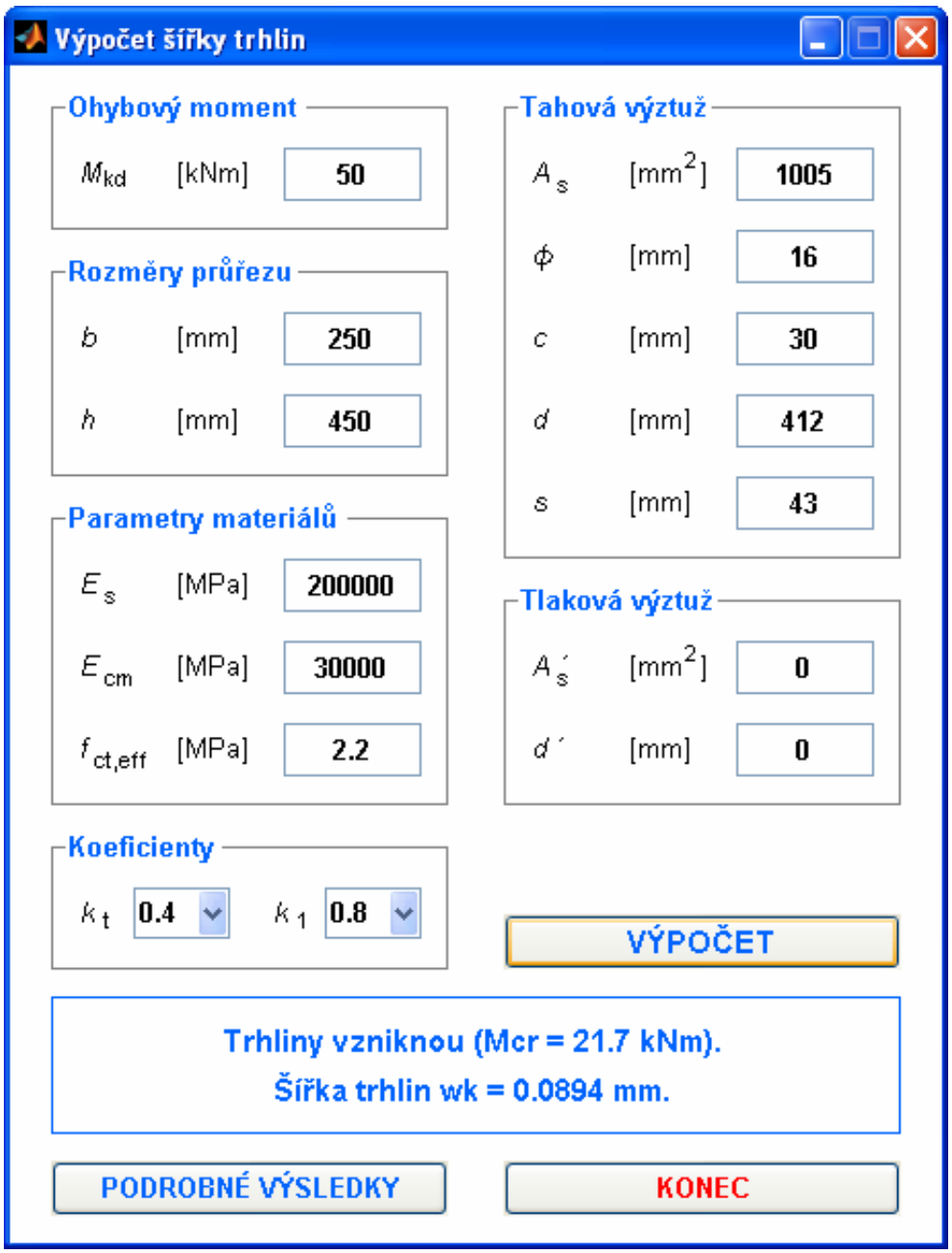
Obr. 3.11 Zobrazení chybového hlášení v okně **Výpočet šířky trhlin**

Výsledek výpočtu je zobrazen ve spodní části dialogového okna **Výpočet šířky trhlin**. Výsledek obsahuje informaci o tom, zda trhliny vzniknou či nikoli, je uvedena hodnota momentu při vzniku trhlin $\boldsymbol{M_{cr}}$ **[kNm]** a pokud trhliny vzniknou, je uvedena také šířka trhlin $\boldsymbol{w_k}$ **[mm]**, viz obr. 3.12a, b.

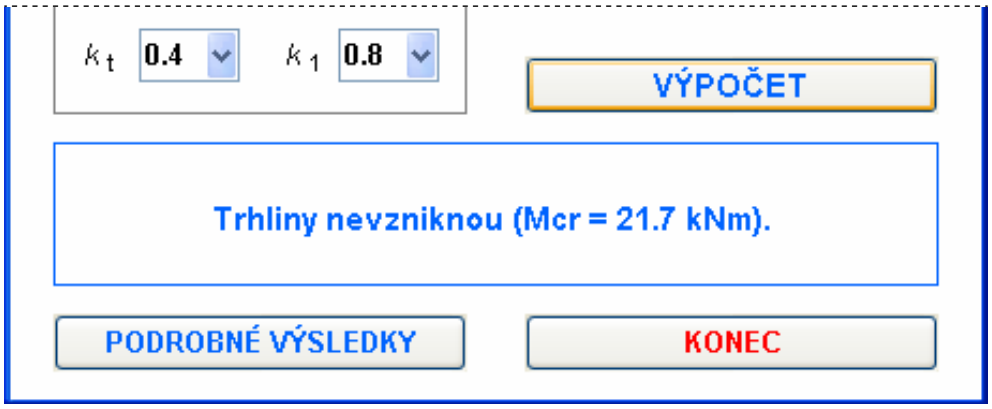
Zároveň s vypsáním výsledků se aktivuje tlačítko **Podrobné výsledky výpočtu** (viz obr. 3.12a, b), pomocí kterého lze zobrazit okno uvedené na obr. 3.13a, resp. 3.31b.

Přehled a podrobný popis výsledků uvedených na obr. 3.13a, b viz tab. 3.3.

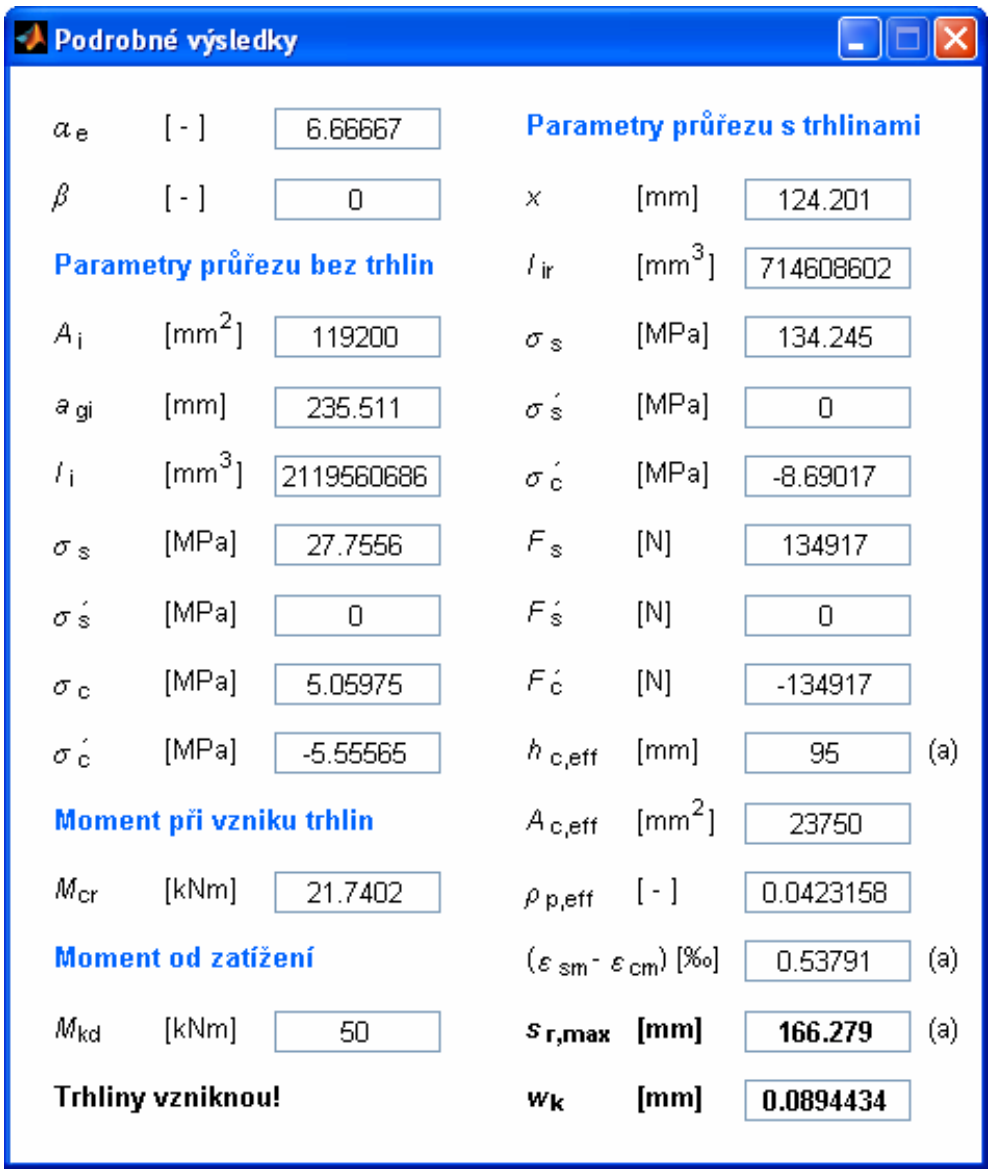
Tlačítko konec (viz obr. 3.12a, b) slouží k uzavření všech oken **Programu**.



Obr. 3.12a Výpočet šířky trhlin – zobrazení výsledků výpočtu, trhliny vzniknou (M_{kd} = 50 kNm > M_{cr} = 21,7 kNm)



Obr. 3.12b Výpočet šířky trhlin – zobrazení výsledků výpočtu, trhliny nevzniknou (M_{kd} = 20 kNm < M_{cr} = 21,7 kNm)



Obr. 3.13a Okno **Podrobné výsledky výpočtu** – trhliny vzniknou

3.13b Okno **Podrobné výsledky výpočtu** – trhliny nevzniknou

Tab. 3.3 Přehled podrobných výsledků výpočtu šířky trhlin

Popis výsledku	Značka	Jednotka	Poznámka
(1)	(2)	(3)	(4)
Poměr E_s / E_{cm}	α_e	-	vztah (2.7)
Koeficient vyztužení tlakovou výztuží	β	-	vztah (2.8) *
Plocha ideálního průřezu bez trhliny	A_i	mm^2	vztah (2.9)
Vzdálenost těžiště ideálního průřezu bez trhliny od tlačeného okraje průřezu	a_{gi}	mm	vztah (2.10)
Moment setrvačnosti ideálního průřezu bez trhliny k těžišti ideálního průřezu bez trhliny	I_i	mm^3	vztah (2.11)
Napětí v tahové výztuži průřezu bez trhliny	σ_s	MPa	vztah (2.12a)
Napětí v tlakové výztuži průřezu bez trhliny	σ_s'	MPa	vztah (2.12b) *
Tahové napětí v betonu na nejvíce taženém okraji průřezu bez trhliny	σ_c	MPa	vztah (2.12c)
Tlakové napětí v betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu bez trhliny	σ_c'	MPa	vztah (2.12d)
Ohybový moment při vzniku trhlin	M_{cr}	kNm	vztah (2.14)
Ohybový moment pro příslušnou kombinaci zatížení	M_{kd}	kNm	zadáno
Vzdálenost neutrální osy ideálního průřezu s trhlinou od nejvíce tlačeného okraje průřezu	x	mm	vztah (2.20)
Moment setrvačnosti ideálního průřezu s trhlinou k těžišti ideálního průřezu s trhlinou	I_{ir}	mm^3	vztah (2.21)
Napětí v tahové výztuži průřezu s trhlinou	σ_s	MPa	vztah (2.22a)
Napětí v tlakové výztuži průřezu s trhlinou	σ_s'	MPa	vztah (2.22b) *
Tlakové napětí v betonu na nejvíce tlačeném okraji průřezu s trhlinou	σ_c'	MPa	vztah (2.22c)
Osová síla v tahové výztuži průřezu s trhlinou	F_s	N	vztah (2.17a)
Osová síla v tlakové výztuži průřezu s trhlinou	F_s'	N	vztah (2.17b) *
Síla v těžišti obrazce napětí v betonu v tlačené části průřezu s trhlinou	F_c'	N	vztah (2.17c)
Výška účinné plochy taženého betonu	$h_{c,eff}$	mm	vztah (2.5a, b, c) **
Účinná plocha taženého betonu obklopující výztuž	$A_{c,eff}$	mm^2	vztah (2.4)
Efektivní stupeň vyztužení	$\rho_{p,eff}$	-	vztah (2.3)
Rozdíl průměrných hodnot přetvoření výztuže a betonu mezi trhlinami	$(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$	‰	vztah (2.6a, b) **
Maximální vzdálenost trhlin	$s_{r,max}$	mm	vztah (2.2a, b) **
Šířka trhlin	w_k	mm	vztah (2.1)

* Pro tlakovou výztuž platí poznámka 3.1, viz s. 23.

** Značka (a), (b), příp. (c), umístěná vedle příslušného pole, vyjadřuje, který ze vztahů je pro výpočet dané veličiny rozhodující. Např. značka (a) u veličiny $h_{c,eff}$ (viz obr. 3.13a) vyjadřuje, že v tomto případě rozhoduje pro výpočet $h_{c,eff}$ vztah (2.5a).

4 Seznam použitých zdrojů

[1] *ČSN EN 1992-1-1. Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby.* Praha: ČNI, listopad 2006.

[2] *Eurocode 2 – Worked Examples.* Brussels: The European Concrete Platform ASBL, May 2008.

[3] *Eurocode 2 – Commentary. Brussels: The European Concrete Platform ASBL, May 2008.*

[4] *MATLAB* [počítačový program]. Verze 7.4.0.287 (R2007a). The MathWorks (USA), 2007. URL <www.mathworks.com>.

[5] PROCHÁZKA, J. – ŠTĚPÁNEK, P. – KRÁTKÝ, J. – KOHOUTKOVÁ, A. – VAŠKOVÁ, J. *Navrhování betonových konstrukcí 1. Prvky z prostého a železového betonu.* 3. vyd. Praha: ČBS Servis, s.r.o., 2007. 316 s. ISBN 978-80-903807-5-2.